ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

: Band 3 :
April 1923

:: Heft 2 ::
Seite 81 bis 160

INHALT:

HAUPTAUFSÄTZE: xxxxxxxxxxxxxxxxx

v. BRAUCHITSCH, Theorie und experimentelle Prüfung des Auswuchtens / HIRSCH, Bewegung von Kugeln in ruhenden Flüssigkeiten / WOLF, Bruchtheorie von A. Griffith / GALERKIN, Berechnung der frei gelagerten elliptischen Platte auf Biegung / MÜLLER, Profilströmung mit Zirkulation / PÖSCHL, Zeichnerische Ermittlung der Beschleunigung bei zwangläufigen Getrieben

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE: xxx

MEYER, Konforme Abbildung

KURZE AUSZÜGE xxxxxxxxxxxxxxxxx

Hydromechanik und Hydraulik

KLEINE MITTEILUNGEN xxxxxxxxxxxx

BUCHBESPRECHUNGEN xxxxxxxxxx

NACHRICHTEN xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER



VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Bd. 3 | Ende April 1923 | Heft 2

Inhalt:

Seite
Hauptaufsätze. E. v. Brauchitsch: Zur Theorie und experimentellen Prüfung des Auswuchtens . . . 81
P. Hirsch: Ueber die Bewegung von Kugeln in ruhenden Flüssigkeiten . . . 93
K. Wolf: Zur Bruchtheorie von A. Griffith . . . 107
B. G. Galerkin: Berechnung der frei gelagerten elliptischen Platte auf Biegung . . . 113
W. Müller: Ueber ebene Profilströmung mit Zirkulation . . . 117
Th. Pöschl: Zeichnerische Ermittlung der Beschleunigung bei zwangläufigen Getrieben . . 128
Zusammenfassende Berichte. Th. Meyer: Konforme Abbildung . . . 136
Kurze Auszüge. Hydromechanik und Hydraulik 148
Kleine Mitteilungen. Blaeß: Zur zeichnerischen Darstellung von Kegelschnitten — Stübler: Schattenkonstruktionen an Schraubenflächen und Verzahnungslehre — Joos: Zwei Integralformeln mit Zylinderfunktionen nullter Ordnung . . . 152
Buchbesprechungen. Blaschke: Vorlesungen über Differential-Geometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie . . . 157
Nachrichten . . . 157
Zuschrift an den Herausgeber . . . 159

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Theorie und experimentellen Prüfung des Auswuchtens.

Von **EBERHARD v. BRAUCHITSCH** in Berlin.

(Mitteilung aus dem Maschinenlaboratorium II der Technischen Hochschule Darmstadt, Professor Heidebroek.)

Maschinenteile, die im Betriebzustand der Maschine sich in dauernder Drehbewegung um eine feste Achse befinden, müssen zur Vermeidung von Vibrationen so gestaltet sein, daß ihre Drehachse eine »freie Achse« im Sinne der Dynamik, d. h. eine »Trägheits-Hauptachse« ist. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wie man an einem gegebenen Körper feststellt, welche Abweichungen in seiner Massenverteilung gegenüber der genannten Forderung bestehen und wie man ihnen durch Hinzufügung von Zusatzmassen entgegenwirken kann. Insbesondere wird die Verwendbarkeit der Lawaczek-Heymannschen Auswuchtmaschine untersucht und das mit dieser Maschine einzuschlagende Auswucht-Verfahren auf theoretische Grundlagen gestellt.

1. Die allgemeine Aufgabe und Definition des Auswuchtens. Die Achse eines massensymmetrischen Drehkörpers ist eine freie Achse; diese Forderung ist aber bei technischen Drehkörpern nicht immer erfüllt. Die Ursachen der Unsymmetrie sind verschieden und können in den meisten Fällen auf unzureichende Werkstattarbeit zurückgeführt werden. Unrunde Bearbeitung, unzentrisches Aufziehen von Scheiben auf Wellen, mangelnde Homogenität des Materials, Fehler im Guß rücken den Schwerpunkt des Drehkörpers aus seiner Drehachse. Infolgedessen treten im Betrieb Fliehkräfte auf, deren Größe linear mit der Entmittung und Masse des Drehkörpers, quadratisch mit der Drehzahl wächst. Aber auch ohne daß der Schwerpunkt aus der Achse heraustritt, können durch Veränderung der Massenverteilung Fliehkraftmomente hervorgerufen werden. Als »Störmassen« bezeichnen wir die Massen, die die geforderte dynamische Symmetrie stören, als »Ausgleichmassen« die Massen, die die Symmetriestörung am Drehkörper wieder ausgleichen. Aufgabe der Auswuchtung ist es, Größe und Lage der Störmassen am Drehkörper zu ermitteln und ihre Störwirkung durch Anbringung von Ausgleichmassen zu beseitigen. Auswuchten heißt also allgemein, die Massensymmetrie eines Drehkörpers bezogen auf seine Drehachse herstellen.

Die Frage der Auswuchtung ist identisch mit folgendem mechanischen Problem. An einem Drehkörper mögen sich zwei Störmassen M_1' und M_2' befinden, d. h. für die übrige Masse des Körpers sei die Drehachse freie Achse. Die Störmassen rufen im Betrieb die Fliehkräfte P_1 und P_2 hervor (Abb. 1). Sind mehr als zwei Störmassen vorhanden, so ändert sich an unserer Betrachtung grundsätzlich nichts. Denn die Fliehkräfte beliebiger Störmassen können, wie Kräfte am starren Körper überhaupt, stets in mannigfacher Weise zu einem Kraftkreuz (zu 2 sich kreuzenden Kräften) zusammengefaßt werden. Die Angriffspunkte der Kräfte des Kraftkreuzes sind dabei, da sämtliche Einzelkräfte die Drehachse senkrecht schneiden, auf der Achse beliebig wählbar. Die Kraftrichtungen hängen von der Wahl der Angriffspunkte und der Größe und Richtung der vorhandenen, zu einem Kraftkreuz zusammenzufassenden Einzelkräfte ab. Die Störmassen M_1' und M_2' sind in diesem allgemeinen Falle nur fingierte Massen, dadurch bestimmt, daß die beiden ihnen entsprechenden Fliehkräfte zusammen dem gesamten System der tatsächlichen Fliehkräfte äquivalent sind. Ebenso, wie man am starren Körper statt der Fliehkräfte aller wirklichen Störmassen die Kräfte des Kraftkreuzes mit den gewählten Angriffspunkten setzen kann, so kann man statt aller wirklichen Störmassen die beiden fingierten Störmassen in die Angriffspunkte der Kräfte des Kraftkreuzes gelegt denken. Störmassen können in diesem Sinne ähnlich transformiert werden, wie Fliehkräfte. Die Voraussetzung für die Möglichkeit einer solchen Zusammenfassung aller Störmassenfliehkräfte ist aber die **Starrheit** des Drehkörpers (und der Welle, falls die Kräfte über den Drehkörper hinaus auf die Welle transportiert werden sollen). Alle bisher veröffentlichten Auswuchtverfahren setzen die Statthaftigkeit des Kräftetransportes voraus. Daraus folgt, daß nach diesem Verfahren nur solche Körper einwandfrei ausgewuchtet werden können, die man im technischen Sinne als starr auffassen darf. Diese Einschränkung könnte man bei schwanken, scheibentragenden Wellen theoretisch dadurch umgehen, daß man die Scheibe auf starrer Welle auswuchtet und dann auf die schwanke Betriebswelle aufzieht. Tatsächlich liegt aber im Aufziehen eine so große Fehlerquelle für Entmittung, daß nur die Auswuchtung eines Drehkörpers in betriebsfertigem Zustande als einwandfrei gelten kann. Die Voraussetzung der Starrheit fehlt nicht nur bei elastisch unzulässig nachgiebigen Wellen, sondern häufig auch bei Ankern elektrischer Maschinen, deren Wicklungen sich im Betrieb verlagern können. Hier kann nur gründliche Behandlung vor der Inbetriebnahme (Schleudern usw.) die zur Auswuchtung und zur Erhaltung der Massensymmetrie notwendige Starrheit herbeiführen.

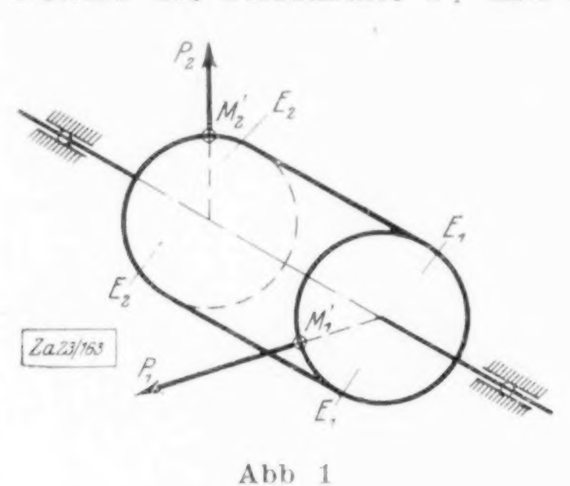


Abb. 1

Das allgemeine Kräftebild des unausgewuchteten starren Drehkörpers beim Umlauf war in Abb. 1 gegeben. Der Drehkörper ist ausgewuchtet, wenn die Massen M_1' und M_2' beseitigt oder Ausgleichmassen am Drehkörper so angebracht werden, daß ihre Fliehkräfte das Kraftkreuz $-P_1$, $-P_2$ bilden. Um die Ausgleichmassen am Drehkörper anbringen zu können, muß man die Angriffspunkte des Fliehkraftkreuzes unter Berücksichtigung der Bauart des Drehkörpers in geeigneter Weise wählen. Meist sind die beiden Stirnseiten des Drehkörpers zur Aufnahme der Ausgleichgewichte geeignet und können als Wirkungsebenen des Fliehkraftkreuzes dienen. Wir wollen diese Ebenen als Ausgleichebenen E_1 und E_2 bezeichnen.

Man unterscheidet statische und dynamische Auswuchtung. Diese Unterscheidung bezieht sich auf die Verschiedenheit der Symetriestörung. Diese kann in einer Entmittung des Schwerpunktes bestehen, derart, daß die freie Achse mit der Drehachse nicht mehr zusammenfällt, wohl aber ihr parallel bleibt. Beim Lauf des Drehkörpers tritt dann eine im Schwerpunkt angreifende Einzelfliehkraft auf. Ihre Beseitigung nennt man statische Auswuchtung. Die andere Möglichkeit einer unsymmetrischen Massenverteilung besteht in einer Verdrehung der freien gegen die Drehachse, wobei der Schwerpunkt des Körpers nicht aus der Drehachse heraustritt. Beim Lauf des Drehkörpers treten alsdann Fliehkraftmomente um den Schwerpunkt auf. Ihre Beseitigung nennt man dynamische Auswuchtung.

Eine Anzahl der bekannten Auswuchtverfahren führt die statische und die dynamische Auswuchtung getrennt durch. Häufig genug allerdings begnügt man sich mit der statischen Auswuchtung und verzichtet ganz auf die Beseitigung der Fliehkraftmomente.

Die Auswuchtmaschine Lawaczek-Heymann ist eine der wenigen, mit denen eine allgemeine Auswuchtung (statische und dynamische) in einem nur einmal unterteilten Arbeitsgang zu erzielen ist.

2. Die Auswuchtmaschine Lawaczek-Heymann. Beschreibung des werkstattmäßigen Auswuchtens. Die allgemeine Auswuchtung eines Drehkörpers in betriebsfertigem Zustand, also eines Läufers zusammen mit seiner Welle, findet in der Auswuchtmaschine statt. Die hier beschriebene Auswuchtmaschine ist von Lawaczek und Heymann konstruiert[1]). Das von Heymann angegebene Auswuchtverfahren zur schrittweisen angenäherten Bestimmung der Ausgleichmassen ist durch einige vom Verfasser angegebene, im Rahmen der Versuchsgenauigkeit strenge Methoden zur Bestimmung der Ausgleichgewichte ersetzt worden. Diese Methoden sind Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen. Das Prinzip der Auswuchtmaschine Lawaczek-Heymann besteht darin, das ganze Auswuchtaggregat federnd zu lagern (Abb. 2). Die Lager L_1 L_2 werden

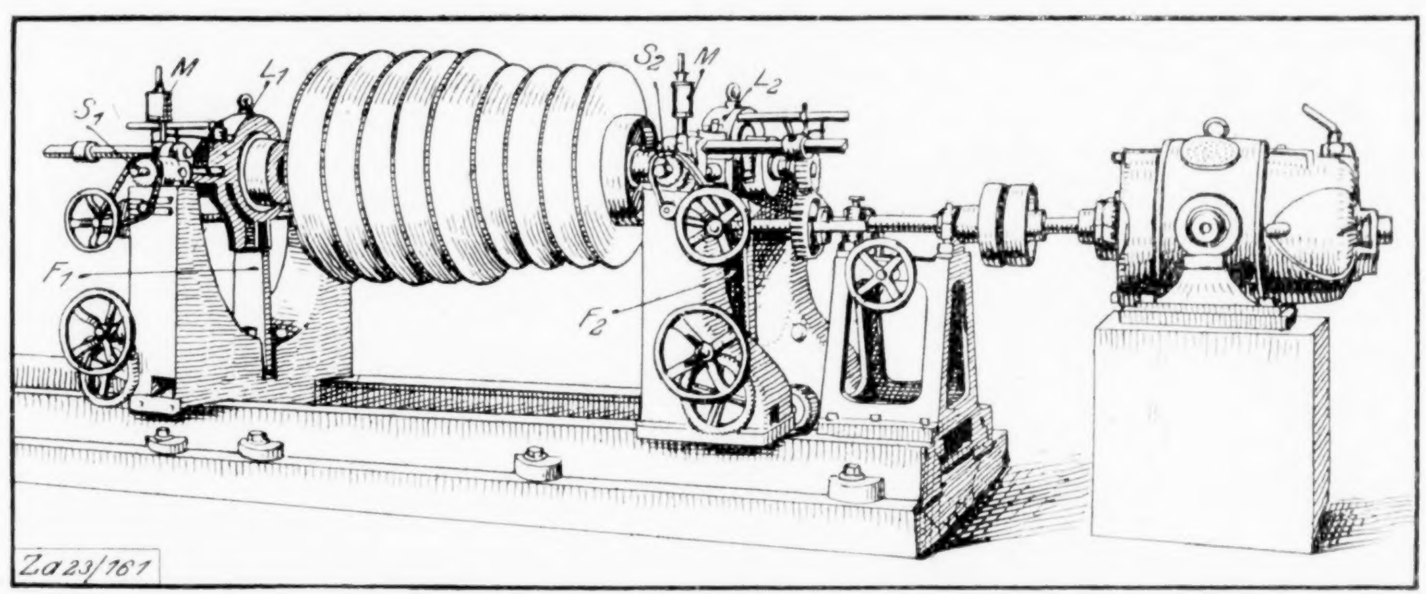


Abb. 2

von den Blattfedern F_1 F_2 getragen. Jedes Lager kann für sich zwischen 2 Spindeln S_1 und S_2 festgestellt werden. Das frei gebliebene Lager kann dann um das andere Drehschwingungen ausführen. Um die Drehschwingungen möglichst reibungsfrei zu gestalten, sind beide Lager als Drehkugellager ausgebildet. Die Schwingungsbewegung der Welle erfolgt demnach innerhalb einer Kegelfläche, deren Spitze der Drehpunkt des festgestellten Lagers bildet, während Blattfeder und Schwinglager in der Grundfläche des Kegels schwingen. Die Schwingung hat einen Freiheitsgrad. Die Störmassen erzeugen beim Lauf des Drehkörpers Fliehkräfte, deren Komponenten in Richtung des Schwingungsausschlages periodisch schwanken. Die Wechselschnelle der Fliehkraftkomponenten ist gleich der Drehschnelle des Läufers. Die schwingende Blattfeder, das Schwinglager, der Drehkörper und die Welle bilden zusammen ein schwingfähiges System.

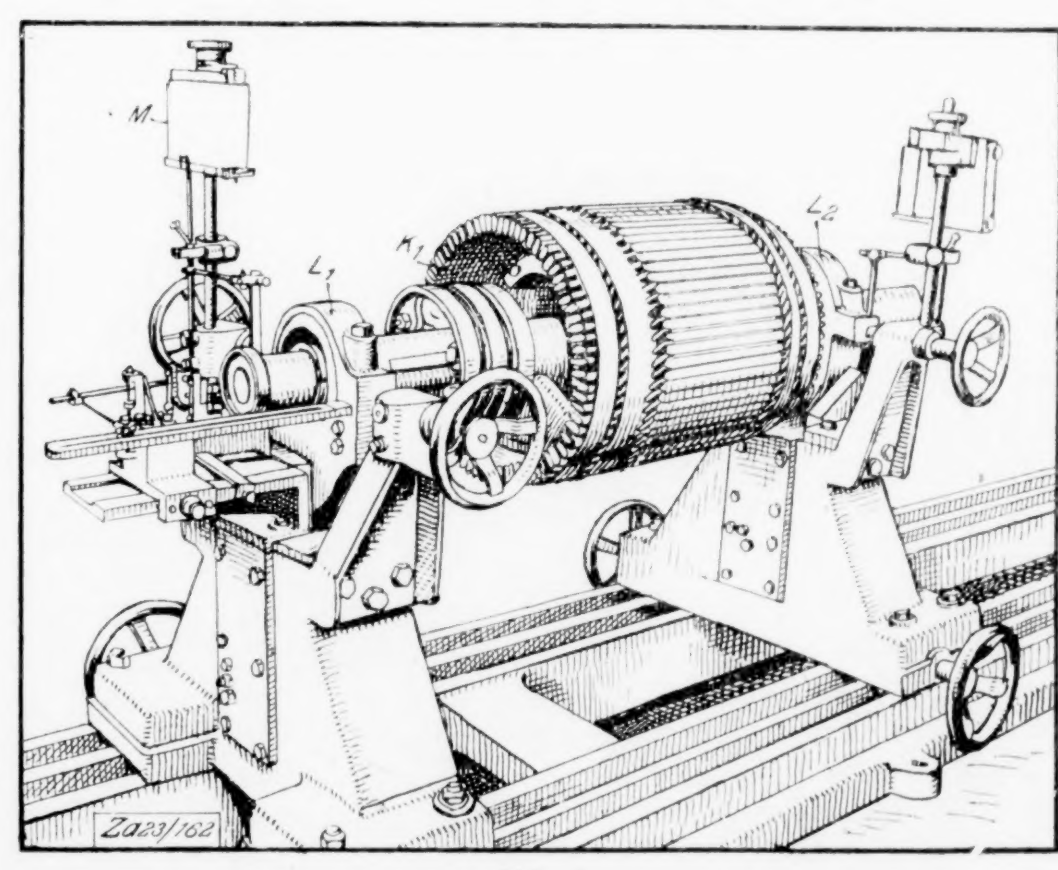


Abb. 3

[1]) Die Maschine wird von der Masch.-Fabrik Carl Schenk, Darmstadt, gebaut.

Ist seine Eigenschwingschnelle gleich der Wechselschnelle der Erregerkräfte, so tritt Gleichklang ein und der Ausschlag der erzwungenen Drehschwingung wird groß. Um die Ausschläge auch bei kleinen Störmassen, also kleinen Erregerkräften und kleinen Ausschlägen, noch deutlich und zugleich meßbar zu machen, wird die Schwingbewegung durch leichte, steife Hebel vom Schwinglager auf den Schwingungsmesser M (Abb. 3) übertragen und dort von einem Bleistift auf Diagrammpapier oder von einem Griffel auf eine angekreidete Glastafel aufgezeichnet. Bei Präzisionsauswuchtung wird ein optischer Schwingungsmesser verwandt. Um Gleichklangausschläge zu erzielen, werden zuerst beide Lager festgestellt und der auszuwuchtende Körper durch einen Motor über eine ausrückbare Kupplung auf eine oberhalb der Gleichklangdrehzahl liegende Drehzahl gebracht. Dann wird die Kupplung ausgerückt und eines der Lager, etwa L_1, der Schwingung freigegeben. Die Störmassenfliehkräfte rufen nun eine erzwungene Drehschwingung des Drehkörpers um das Lager L_2 hervor. Im Auslauf sinkt die Drehschnelle bis zur Eigenschwingschnelle des Blattfeder-Systems, die Ausschläge werden groß, um bei weiterem Sinken der Drehschnelle wieder kleiner zu werden. Grundlage der Messung zur Bestimmung der Störmassen sind im allgemeinen die Größtausschläge. Sie können nur im Auslauf gemessen werden, da es praktisch nie gelingt, die Drehzahl des Antriebmotors genau auf die Eigenschwingung des Drehkörperaggregats abzustimmen, da sich ferner aus dem Kraftfeld des Motors auf die Drehschwingung störende Einwirkungen ausbilden könnten, deren Größe sich jeder Beurteilung entzieht und da schließlich der eingekuppelte Motor die Schwingung um das eine Lager stark dämpfen, die um das andere ganz unmöglich machen würde.

Die Auswuchtung geht nun folgendermaßen vor sich. Man läßt im Auslauf den Drehkörper Schwingungen um das Lager L_2 ausführen. Die Schwingungen werden hervorgerufen durch das Fliehkraftkreuz P_1 P_2 (Abb. 1) in den Ausgleichebenen E_1 E_2. Die Ausgleichebenen teilen den Lagerabstand l in die Abschnitte l_1 l_2 bezw. l_3 l_4. Die axiale Drehkörperlänge ist l_m (Abb. 4). Die Schwingung soll nun durch ein Ausgleichgewicht von der Masse m_1 in der Ebene E_1 zur Ruhe gebracht werden. Um über die Größe von m_1 Aufschluß zu gewinnen, denkt man sich im Lager L_2 die gleich groß entgegengesetzten Kräfte $+P_2$ $-P_2$ angreifen und das Kräftepaar $P_2\,l_4$ durch das gleich große, in der gleichen Ebene wirkende Kräftepaar $a l_2$ ersetzt. Dann greift in Ebene E_1 die Resultante p_1 aus a und P_1 und im Lager L_2 die Kraft $P_2 - a$ an. Einfluß auf die Drehschwingung des Drehkörpers um das Lager L_2 hat nur die Kraft p_1. Die Masse m_1 muß also nach Lage und Richtung so bestimmt werden, daß ihre Fliehkraft die Größe $-p_1$ hat. Dann findet keine Drehschwingung um L_2 mehr statt.

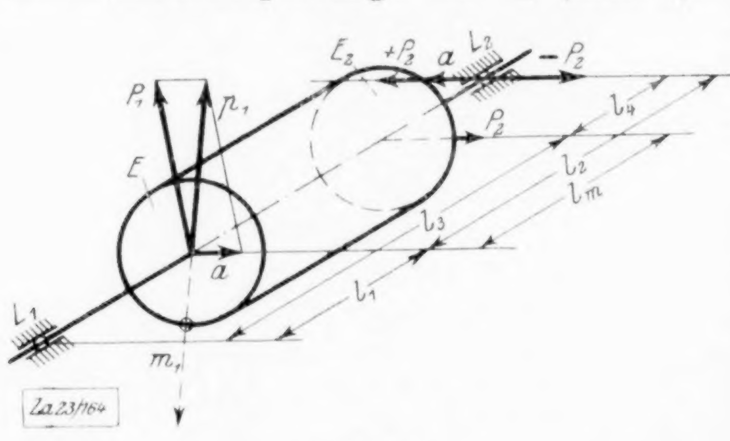


Abb. 4

Zur Bestimmung des Ausgleichgewichtes bezw. der Masse m_1 sind mehrere werkstattbrauchbare Verfahren angegeben worden[1]). Das im folgenden beschriebene sogenannte Kranzverfahren sei deshalb hervorgehoben, weil es den Weg zur automatischen Bestimmung von m_1 und damit einen Weg zur Selbstauswuchtung weist. Es geht von folgender Ueberlegung aus: Bringt man ein Gewicht von der beliebigen Masse m_x an verschiedenen Stellen des Kranzumfanges der Ausgleichebene E_1 an und mißt in jeder Stellung den Gleichklangausschlag bei der Drehschwingung um das Lager L_2, so kann

[1]) Allgemeine Literaturangabe:

1. Lawaczek. Das Auswuchten raschumlaufender Massen. Zeitschr. f. d. ges. Turb.-Wesen 1911.
2. Heidebroek. Die Auswuchtung umlaufender Maschinenteile. — Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1916.
3. Heymann. Der Betrieb. 1919, Heft 6.
4. » Schwingungsversuche beim Auswuchten raschumlaufender Massen nach dem System Lawaczek. Doktor-Dissert. 1916 (Darmstadt).
5. » Ein dynamisches werkstattmäßiges Auswuchtverfahren. Der Betrieb 1919, Heft 10.
6. » Energieverlust durch Unbalanz. Der Betrieb 1921, Heft 13.
7. Lehr. Die umlaufenden Massen als Schwingungserreger. Maschinenbau/Gestaltung Heft 10, 1922.
8. » Der heutige Stand der Auswuchttechnik. Maschinenbau/Gestaltung, Heft 5/6, 1922/23.
9. Stodola. Dampfturbinen, 5. Aufl. 1922.

man die Ausschlagsgrößen in erster Annäherung proportional der Kraftresultante p_r aus p_1 und der Fliehkraft p_x der Masse m_x setzen. Aus Abb. 5 ist die Beziehung

$$p_r = \sqrt{p_1^2 + p_x^2 - 2\, p_1\, p_x \cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ersichtlich. Setzt man nun $p_x = \lambda\, p_1$, so ist:

$$p_r = p_1 \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Für $\lambda = 2 \cos \alpha_0$ ist

$$p_r = p_1 = \frac{p_x}{2 \cos \alpha_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Gl. (3) ist so zu deuten. Wenn die Störfliehkraft p_1 und die resultierende Fliehkraft p_r (also auch die ihnen proportionalen Ausschläge) einander gleich sind, so bildet die Fliehkraft p_x, die nach Größe und Richtung durch die Ausgleichmasse m_x bestimmt ist, mit der unbekannten Fliehkraft p_1 den Winkel α_0. Es ist zu beachten, daß Gl. (3) nur dann Sinn hat, wenn

$$2\, p_1 \geqq p_x > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ist, da der cos zwischen 0 und 1 liegt.

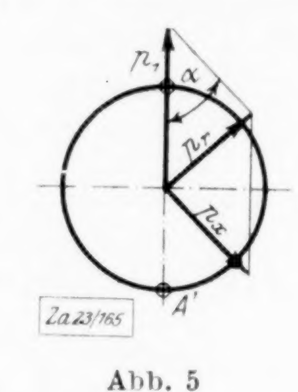


Abb. 5

Abb. 6

Auf Gl. (3) gründet sich folgendes werkstattmäßige Verfahren zur Bestimmung der Ausgleichmasse m_1:

Man bringt die beliebige Masse m_x in verschiedenen Kranzstellungen in der Ausgleichebene E_1 an, mißt jedesmal die Gleichklangausschläge a_r, die von p_r hervorgerufen werden, und trägt sie als Ordinaten über dem abgewickelten Kranzumfang als Abszisse auf (Abb. 6). Man verbindet die Endpunkte der Ordinaten zu der Kurve $k-k$, deren Maximum die Richtung von p_1 angibt. Denn dem Maximum entspricht die Gleichheit der Richtungen von p_x und p_1 und der Größtwert $p_r = p_x + p_1$. Die Kurve $k-k$ liegt symmetrisch zum Maximalwert und zu dem gegen ihn um π verschobenen Minimum der Kurve, das durch den Wert $p_r = p_1 - p_x$ gekennzeichnet ist. Das Minimum A der Kurve liefert den Punkt A' am Kranzumfang, an dem die Ausgleichmasse angebracht werden muß. Ihre Größe ist nun folgendermaßen zu ermitteln. Man mißt den Ausschlag a_1, den die Fliehkraft p_1 allein, also der unausgewuchtete Drehkörper ohne die Zusatzmasse m_x, hervorruft, und zieht im Diagramm im Abstand a_1 die Parallele zur Abszisse. Diese schneidet, wenn Gl. (4) erfüllt ist, die Kurve in 2 Punkten $Z_1\, Z_2$, die symmetrisch zum Kurvenminimum liegen. Ist Gl. (4) nicht erfüllt, was sich dadurch kenntlich macht, daß die Parallele im Abstand a_1 kleiner als das Kurvenminimum ist, so ist die Kurve mit einer kleineren Masse m_x aufzunehmen. Der Strecke $Z_1\, Z_2$ entspricht ein Winkel $2\,\alpha_0$ am Kranz und ein Wert $\frac{1}{2 \cos \alpha_0}$, der durch einen geeigneten Maßstab sofort im Diagramm abgelesen werden kann. Dann findet man die gesuchte Größe m_1 aus der Beziehung:

$$m_1 = m_x \frac{1}{2 \cos \alpha_0}.$$

Bringt man die Masse m_1 am Punkt A' des Kranzes an, so ist die Störfliehkraft p_1 durch die Fliehkraft $-p_1$ der Masse m_1 ausgeglichen. Der Drehkörper führt keine Drehschwingungen mehr um das Lager L_2 aus.

Dieses Kranzverfahren ist für die Werkstatt sehr verbessert worden durch einen von Heymann angegebenen kleinen, die Zusatzmasse m_x tragenden Hilfsapparat, der auf jeden Drehkörper aufgesetzt werden kann und der es gestattet, während des Laufes des Drehkörpers die Masse m_x in beliebig bestimmbare Kranzstellungen zu bringen. Diese Halbautomatik erspart das besonders bei großen Drehkörpern zeitraubende Stillsetzen des Läufers zwecks Versetzung der Masse m_x am Kranz, erfordert aber eine im Lauf ein-

rückbare — etwa elektromagnetische — Kupplung. Ist diese vorhanden, so wird im Auslauf ein Größtausschlag gemessen, der Drehkörper sofort wieder auf eine über Gleichklang liegende Drehzahl gebracht, die Masse m_x am Kranzumfang verstellt, wiederum der Gleichklangausschlag im Auslauf gemessen, usw. Ebenso kann die Wirkung von m_x ganz ausgeschaltet und der von p_1 allein hervorgerufene Ausschlag a_1 gemessen werden. Durch dieses Vorgehen erfolgt die Aufnahme beliebig vieler Ausschlagsgrößen a_r in sehr kurzer Zeit, die Kurve $k-k$ ist schnell und genau ermittelt und aus ihr die Lage und Größe der Ausgleichmasse m_1.

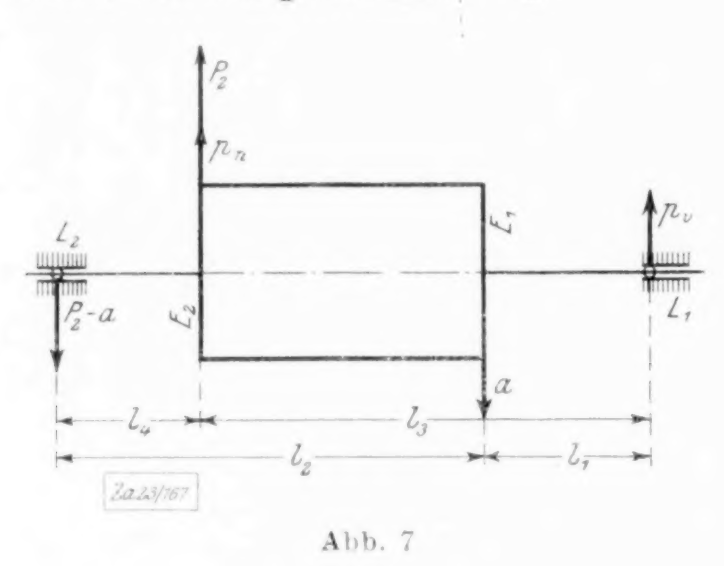


Abb. 7

Ist auf diese Weise die Fliehkraft p_1 ausgelöscht, so bleiben noch die in Lager L_2 angreifenden Kräfte P_2-a zu beseitigen. Ihre Wirkung wird sichtbar, wenn Lager L_1 als Drehlager und Lager L_2 als Schwinglager benutzt wird. Das Moment $l\,(P_2-a)$ ruft nun Drehschwingungen des auszuwuchtenden Körpers um das Lager L_1 hervor. Diese Schwingungen werden in grundsätzlich der gleichen Weise beseitigt, wie die Schwingungen des Körpers um das Lager L_2. Man denkt sich im Lager L_1 die gleich großen entgegengesetzt gerichteten Kräfte $+(P_2-a)$ und $-(P_2-a)$ angebracht und das Moment $(P_2-a)\,l$ durch das gleichgroße, in der gleichen Ebene wirkende Moment $p_n\,l_3$ ersetzt (Abb. 7). Dann greift in der Ausgleichebene E_2 die Kraft

$$p_n = (P_2 - a)\,\frac{l}{l_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

im Lager L_1 die Kraft $(P_2-a)-(P_2-a)\,\frac{l}{l_3}=p_v$ an. Einfluß auf die Drehschwingung des Drehkörpers um L_1 hat nur die in der Ebene E_2 angreifende Kraft p_n. Die Masse m_n von der Fliehkraft $-p_n$ wird nach dem Kranzverfahren in angegebener Weise bestimmt. Nach Anbringung dieses Ausgleichgewichtes ist die Auswuchtung noch nicht beendet. Denn es greift im Lager L_1 noch die Kraft p_v an. Sie müßte während eines Schwingungsvorganges um das Lager L_2 durch ein Ausgleichgewicht von der Fliehkraft $p_v\,\frac{l}{l_2}$ in der Ebene E_1 beseitigt werden, würde aber im Lager L_2 eine Restkraft zurücklassen, die während eines weiteren Schwingungsvorganges um das Lager L_1 beseitigt werden müßte usw. Alle Kräfte p_v, p_n usw. liegen in der aus P_2-a und der Drehachse gebildeten Ebene.

Dieses schrittweise Auswuchten läßt sich jedoch bedeutend abkürzen. Man kann leicht nachweisen, daß die je und je in den Ausgleichebenen einzusetzenden Massen mit jedem Wechsel der Drehschwingungsachse kleiner werden und in jeder Ebene eine unendliche nach Null konvergierende geometrische Reihe bilden. Die endlichen Summen dieser Reihen sind die Größen der Ausgleichmassen in den Ebenen E_1 und E_2, deren Fliehkräfte im Verein mit $-p_1$ das Störkraftkreuz $P_1\,P_2$ beseitigen. An Hand der Abb. 4 kann man erkennen, daß die Summe aller Massen in der Ebene E_1 die Fliehkraft a hervorruft, die sich mit $-p_1$ zur Kraft $-P_1$ zusammensetzt, während die Summe der Massen in Ebene E_2 die Fliehkraft $-P_2$ besitzen muß. Statt die Entwicklung der Reihen durchzuführen, wollen wir die Kräfte a und $-P_2$ bezw. die Massen, durch die sie hervorgerufen werden, aus den uns schon bekannten Größen mittels der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen herleiten (Abb. 7). Es müssen die Summe aller Kräfte und die Summe der Momente (etwa um L_1) in der aus (P_2-a) und der Drehachse gebildeten Ebene gleich Null sein, d. h. es muß sein:

$$(P_2-a)+a-P_2=0 \quad . \; . \; . \quad (6), \qquad (P_2-a)\,l+a\,l_1-P_2\,l_3=0 \quad . \; . \; . \quad (7).$$

Daraus ergibt sich:

$$a=(P_2-a)\,\frac{l_4}{l_3-l_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8), \qquad +P_2=(P_2-a)\,\frac{l_2}{l_3-l_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Unter Berücksichtigung von (5) erhalten wir:

$$a=p_n\,\frac{l_3\,l_4}{l\,l_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10), \qquad +P_2=p_n\,\frac{l_2\,l_3}{l\,l_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Dadurch sind die gesuchten Kräfte a und $-P_2$ bestimmt. Um noch die sie erzeugenden Ausgleichmassen m_a und $M_2 = M_2'$ zu bestimmen, nehmen wir an, daß m_a am Radius r', M_2 am Radius r'' angebracht wird. Dann ist:

$$m_a = \frac{r''}{r'} \frac{l_3 l_4}{l\, l_m} m_n = \frac{r''}{r'} m_n A \quad . \quad . \quad . \quad (12), \qquad M_2 = m_n \frac{l_2 l_3}{l\, l_m} = m_n B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

An Stelle der durch das zweite Kranzverfahren bestimmten Masse m_n ist also die Masse M_2 einzusetzen, während m_a in der Ebene E_1 um 180° gegen M_2 verschoben angebracht werden muß. Für die Faktoren A und B sind Kurventafeln aufgestellt worden, die die Ausrechnung ersparen und für beliebige Werte $l_1\, l_2\, l_3\, l_4\, l_m$ unmittelbar die Werte der Faktoren A und B angeben.

Mit den Massen m_1, m_a und M_2 ist der Drehkörper in den Grenzen der Versuchsgenauigkeit vollkommen ausgewuchtet. Zur werkstattmäßigen allgemeinen Auswuchtung gehört also die Durchführung je eines Kranzverfahrens während der Schwingung des Drehkörpers um die Lager L_1 und L_2 zur Bestimmung der Massen m_1 und m_n und die Berechnung der Werte m_a und M_2 aus den Gleichungen (12) und (13).

3. Das Proportionendreieck, die Hauptgleichungen des Auswuchtens und das Zweigewichts-Verfahren. Im vorigen Abschnitt haben wir ein bestimmtes Auswuchtverfahren beschrieben, um an einem konkreten Beispiel das Wesen der Auswuchtmaschine Lawaczek-Heymann zu erläutern. Im Laufe der Zeit sind aus Verschiedenheiten der Werkstattforderungen eine Reihe anderer Verfahren entstanden, die dem beschriebenen Verfahren gleichwertig sind. Sie alle zu beschreiben, kann nicht Zweck dieser Arbeit sein. Es ist dies um so weniger notwendig, als sich für alle Verfahren eine gemeinsame im folgenden abgeleitete Grundlage herstellen läßt.

Betrachtet man den Drehkörper in der Auswuchtmaschine vom Lager L_1 aus in der Richtung seiner Achse, so projiziert sich die Achse in den Punkt O (Abb. 8), während die Fliehkräfte P_1 und P_2 den Winkel β bilden. Beginnt man nun die Auswuchtung in der oben beschriebenen Weise, ersetzt also das Moment $P_2 l_4$ durch das gleich große, in der gleichen Ebene wirkende Moment $a l_2$, so stellen sich a und die Resultante p_1 aus a und P_1 in der in Abb. 8 angegebenen Weise dar. Wir wissen, daß p_1 durch ein Kranzverfahren zu bestimmen und durch Anbringung der Masse m_1 zu beseitigen ist. Wir denken uns nun die Masse m_1 wieder vom Läufer fortgenommen, und die Auswuchtung mit einer Drehschwingung um das Lager L_1 begonnen. Wir verfahren in grundsätzlich gleicher Weise, denken uns im Lager L_1 die Kräfte $+P_1$ und $-P_1$ angreifen und ersetzen das Moment $P_1 l_1$ durch das gleich große, in der gleichen Ebene wirkende Moment $l_3 b$. Dann greift in der Ebene E_2 die Resultante p_2 aus P_2 und b, im Lager L_1 die Kraft $P_1 - b$ an. p_2 ist durch ein Kranzverfahren während der Drehschwingung des Läufers um das Lager L_1 nach Größe und Richtung zu bestimmen und durch die Fliehkraft $-p_2$ der Masse m_2 des Ausgleichgewichtes in der Ebene E_2 zu beseitigen. Wir tragen die Kräfte b und p_2 noch in Abb. 8 ein; $p_1 p_2$ sind durch Kranzverfahren nach Größe und Richtung bestimmbar, also auch der Winkel ε, den sie einschließen. Uns kommt es aber darauf an, die Kräfte $P_1 P_2$ zu erkennen und zu beseitigen. Verbindet man nun die Spitzen I und H der Kraftvektoren p_1 und p_2 und verlängert P_1 und P_2 bis zu ihren Schnittpunkten K und G mit den Verlängerungen der Strecke IH, so entsteht das Dreieck OKG. In diesem Dreieck bestehen folgende Proportionen:

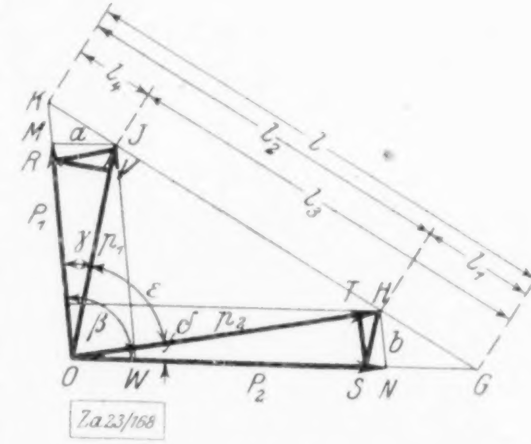


Abb. 8

$$P_1 : b = l_3 : l_1 = OM : HN = IG : HG \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

$$P_2 : a = l_2 : l_4 = ON : MJ = HK : IK \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

also ist $\qquad HG = \lambda l_1;\; IG = \lambda l_3;\; HK = \mu l_2;\; IK = \mu l_4,$

daher $\qquad HG : HK : IG : IK = \lambda l_1 : \mu l_2 : \lambda l_3 : \mu l_4.$

Ferner ist: $\quad HK - IK = IG - HG$ oder $\mu l_2 - \mu l_4 = \lambda l_3 - \lambda l_1.$

Nach Abb. 4 ist aber: $l_2 - l_4 = l_3 - l_1$, also $\mu = \lambda$ und schließlich:

$$HG : HK : IG : IK = l_1 : l_2 : l_3 : l_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Auf Grund dieser Proportionen sei das Dreieck OKG als »Proportionendreieck« bezeichnet. Auf diesen geometrischen Beziehungen baut sich das später noch beschriebene Zweigewichts-Verfahren auf, das alle anderen Verfahren theoretisch an Einfachheit übertrifft.

Wir leiten nun die gleichen Beziehungen noch analytisch her, um den Zusammenhang des Proportionendreiecks mit dem im vorigen Kapitel beschriebenen Verfahren zu zeigen.

Im Dreieck OKG sind die 5 Unbekannten $P_1 P_2$, die Winkel γ und δ, die von $P_1 p_1$ und $P_2 p_2$ eingeschlossen werden, und der Maßstab λ. Aus den 5 Dreiecken OIM, OIK, OHN, OHG und OHI lassen sich 5 Gleichungen aufstellen, aus denen die Unbekannten zu ermitteln sind. Die elementare Rechnung braucht hier nicht ausgeführt zu werden. Wir beschränken uns auf Wiedergabe der Ergebnisse:

$$P_1 = \frac{l_2 l_3}{l l_m} \sqrt{p_1^2 + \left(p_2 \frac{l_4}{l_2}\right)^2 - 2\, p_1 p_2 \frac{l_4}{l_2} \cos \varepsilon} = \frac{l_2 l_3}{l l_m} \overline{OR} \quad . \; . \; . \quad (17),$$

wenn R der Schnittpunkt der durch I zu p_2 gezogenen Parallelen mit OM ist.

$$P_2 = \frac{l_2 l_3}{l l_m} \sqrt{\left(p_1 \frac{l_1}{l_3}\right)^2 + p_2^2 - 2\, p_1 \frac{l_1}{l_3} p_2 \cos \varepsilon} = \frac{l_2 l_3}{l l_m} \overline{OS} \quad . \; . \; . \quad (18),$$

wo S der Schnittpunkt der durch H zu p_1 gezogenen Parallele mit ON ist.

$$\cos \gamma = \frac{p_1 - p_2 \dfrac{l_4}{l_2}}{\sqrt{p_1^2 + \left(p_2 \dfrac{l_4}{l_2}\right)^2 - 2\, p_1 p_2 \dfrac{l_4}{l_2} \cos \varepsilon}} = \frac{OV}{OR} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (19),$$

wo V der Fußpunkt des Lotes von R auf p_1 ist.

$$\cos \delta = \frac{p_2 - p_1 \dfrac{l_1}{l_3} \cos \varepsilon}{\sqrt{\left(p_1 \dfrac{l_1}{l_3}\right)^2 + p_2^2 - 2\, p_1 \dfrac{l_1}{l_3} p_2 \cos \varepsilon}} = \frac{OT}{OS} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (20),$$

wenn T der Fußpunkt des Lotes von S auf p_2 ist.

$$\lambda = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2\, p_1 p_2 \cos \varepsilon}}{l_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21).$$

Gl. (17) bis (20) nennen wir die Hauptgleichungen des Auswuchtens, weil sie die einfachsten Beziehungen zwischen den experimentell bestimmbaren Größen $p_1 p_2 \varepsilon$ und den gesuchten Größen $P_1 P_2 \gamma \delta$ angeben.

Am Proportionendreieck sind auch die Werte zu finden, die bei Benutzung beliebiger Auswuchtverfahren in Erscheinung treten. Vergleicht man etwa die Gleichungen (11) und (18), so erkennt man, daß die Kraft p_n durch die Strecke OS dargestellt wird, die Kraft $P_2 - a$ durch die Strecke WN usw.

Auf die Eigenschaften des Proportionendreiecks gründet sich das »Zweigewichts-Verfahren«. Die Ausgleichmassen m_1 und m_2 und ihre Fliehkräfte $m_1 r' w^2 = -p_1$ und $m_2 r'' w^2 = -p_2$ werden durch Kranzverfahren bestimmt. Man zeichnet mit den Größen $OI = m_1 r'$, $OH = m_2 r$, dem Winkel ε und den bekannten Proportionen das Dreieck OGK und findet aus $OM = M_1' r'$ und $ON = M_2' r''$ die Ausgleichmassen M_1 und M_2, die, um die Winkel γ und δ gegen die Massen m_1 und m_2 am Kranz der Ausgleichebenen E_1 und E_2 versetzt, die vollkommene Auswuchtung des Läufers herbeiführen. Die Konstruktion des Proportionendreiecks wird durch einen kleinen Hilfsapparat (einer Scheibe mit verstellbaren, Maßstäbe tragenden Zeigern) dem werkstattmäßigen Auswuchten erspart. Die vollkommene Auswuchtung ist hier mit zwei Kranzverfahren (also zweimaligem Stillsetzen der Auswuchtmaschine) und der Benutzung des Hilfsapparates erreicht. Der Vorteil, daß nur 2, nicht, wie im oben beschriebenen Verfahren 3 Gewichte am Drehkörper anzubringen sind, kann betriebstechnisch von Bedeutung sein.

Sollte der seltene Fall eintreten, daß die Kräfte des Kraftkreuzes den Winkel 180^0 einschließen, daß also p_1 mit P_1, p_2 mit P_2 in gleiche Richtung fällt, so ist das Proportionendreieck nicht mehr zu konstruieren. In diesem Fall sind die Hauptgleichungen zur rechnerischen Bestimmung der Werte P_1 und P_2 zu benutzen. Ihre Richtungen sind durch p_1 und p_2 gegeben. Für $\varepsilon = 180^0$ erhält man:

$$P_1 = \frac{l_3}{l l_m} (p_1 l_2 + p_2 l_4) \qquad\qquad P_2 = \frac{l_2}{l l_m} (p_1 l_1 + p_2 l_3).$$

Mit den angegebenen Ableitungen ist im wesentlichen die Theorie des allgemeinen Auswuchtens starrer Drehkörper auf der Auswuchtmaschine Lawaczek-Heymann erschöpft. Es sollen jetzt noch an Hand des Proportionendreiecks Beziehungen gegeben werden, die zur Beurteilung des in der Praxis viel verwandten rein statischen Auswuchtens von Wichtigkeit sind.

4. Die statische Auswuchtung. Die statische Auswuchtung setzt sich laut Definition zum Ziel, eine Massenverteilung am Drehkörper herbeizuführen, bei der der Schwerpunkt des Drehkörpers in der Drehachse liegt. Sie kann dies erreichen, indem sie die Einzelfliehkraft der Störmassen durch die Fliehkraft einer Ausgleichmasse beseitigt oder Einzelfliehkraft und Ausgleichfliehkraft zu einem Kräftepaar zusammensetzt. Was die statische Auswuchtung erreichen kann, soll in diesem Abschnitt besprochen werden. Um einen Vergleich mit der allgemeinen Auswuchtung und ihrer uns bekannten Theorie zu ermöglichen, legen wir der statischen Auswuchtung das gleiche Kräftebild wie der allgemeinen Auswuchtung zugrunde (Abb. 1).

Es könnten hier Bedenken erhoben werden, ob die fingierten Massen M_1' und M_2', die aus der Zusammenfassung dynamischer Fliehkraftwirkungen resultieren, auch der statischen Auswuchtung zugrunde gelegt werden können. Augenscheinlich ist aber die mangelnde Massensymmetrie, die zu ihrer Beseitigung die Ausgleichmassen $M_1 = M_1'$ und $M_2 = M_2'$ braucht, eine Eigenschaft des Drehkörpers unabhängig von ihrer Erscheinungsform, also unabhängig davon, ob sie durch statische oder dynamische Methoden sichtbar gemacht wird. Infolgedessen ist man berechtigt, jeder Auswuchtart die gleiche Verteilung der Störmassen (Abb. 1) zugrunde zu legen.

Abb. 9

Zur Bestimmung der unbekannten Störmassen M_1' und M_2' wird bei statischer Auswuchtung der Drehkörper auf Schneiden gelegt (Abb. 9). Die Momente der Störgewichte um die Drehachse rollen den Drehkörper auf den Schneiden in die Gleichgewichtslage, in der die beiden Momente einander gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, in der also die Beziehung gilt:

$$g\, M_1'\, r' \sin \eta = g\, M_2'\, r'' \sin \vartheta \text{ (Abb. 10)} \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Hierin sind η und ϑ die Winkel, die die zu den Störmassen gezogenen Radien in der Gleichgewichtslage mit der Lotrechten bilden. Wie beim allgemeinen Auswuchtverfahren sind die Radien der fingierten Massen M_1' und M_2' gleich den Radien r' und r'' der Kränze, an denen die Ausgleichgewichie angebracht werden können.

Nun wird auf der Drehkörperkante $M\,N$ lotrecht über der Drehachse ein Gewicht von der Masse M_g so angebracht (Abb. 9), daß die Momente aller Massen um die Drehachse in jeder Winkelstellung des Drehkörpers die Summe Null haben. Dann rollt der Drehkörper aus keiner Winkelstellung mehr auf den Schneiden.

Damit ist die statische Auswuchtung grundsätzlich beendet. Das Rollen auf Schneiden wird bei anderen statischen Auswuchtmaschinen und Schwerpunktswagen durch andere Vorrichtungen ersetzt, die sich der Konstruktion der Gewichtswage mehr oder weniger eng anschließen. Sie unterscheiden sich vom Auswuchten auf Schneiden nur durch ihre erhöhte Empfindlichkeit. Die mechanischen Grundlagen, und auf diese kommt es uns hier an, sind bei allen statischen Auswuchtmaschinen dieselben. Wir können unserer Untersuchung deshalb auch die in Abb. 9 skizzierte Anordnung zugrunde legen.

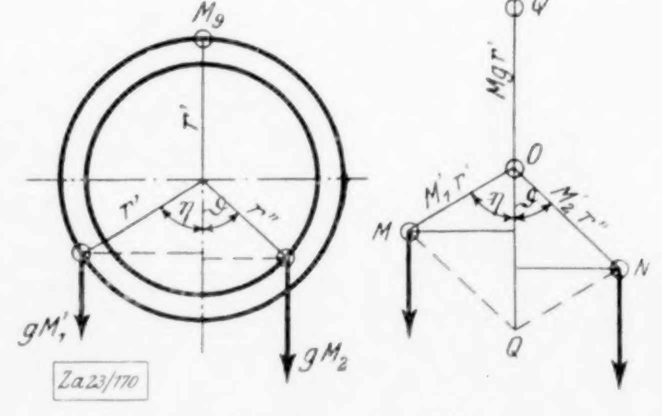


Abb. 10 und 11

Zunächst wollen wir die Größe der Masse M_g bestimmen, die, auf der Drehkörperkante $M\,N$ angebracht, die statische Auswuchtung bewirkt. Der Gleichgewichtszustand des statisch unausgewuchteten Drehkörpers ist durch die Gl. (22) definiert, die aus Abb. 10 abzuleiten ist. Bringen wir die Masse M_g im Abstand r' von der Drehachse an, so erfordert das Gleichgewicht:

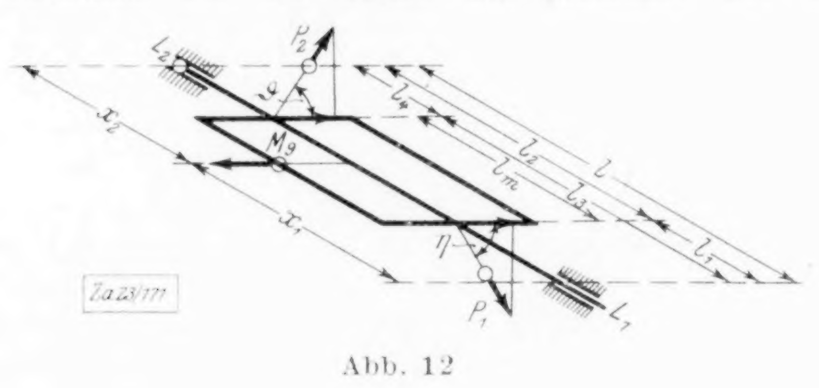
$$M_g\, r' = M_1'\, r' \cos \eta + M_2'\, r'' \cos \vartheta \quad \ldots \ldots \quad (23).$$

Gl. (23) ist auch noch erfüllt, wenn wir uns vorstellen, daß beide Störmassen und die Ausgleichmasse die Größe 1 und die Abstände $M_1' r$, $M_2' r''$ und $M_g r'$ von der Drehachse haben. Dann ist die Gl. (23) durch Abb. 11 darstellbar. Den Momenten $M_1' r'$, $M_2' r''$, $M_g r'$ entsprechen nun die Strecken OM, ON, OQ. Vergleichen wir aber Abb. 11 mit dem Proportionendreieck (Abb. 8), so erkennen wir, daß, wenn im Proportionendreieck die Störmassenfliehkräfte $P_1 = M_1 r' w^2$ und $P_2 r'' w^2$ im Maßstabe $w^2 = 1$ gezeichnet sind,

$$\triangle MON \text{ (aus Abb. 8)} \simeq \triangle MON \text{ (aus Abb. 11)}$$

ist. Also auch das Proportionendreieck gibt Aufschluß über den Gleichgewichtszustand bei statischer Auswuchtung. Das statische Ausgleichgewicht muß ein statisches Moment bezogen auf die Drehachse besitzen, das gleich der geometrischen Summe OQ der Strecken $OM = M_1' r'$ und $ON = M_2' r''$ ist. Der gleiche Drehkörper mit den gleichen Störmassen wird also allgemein durch die Massen M_1 und M_2, statisch durch die Masse M_g ausgewuchtet. Durch die allgemeine Auswuchtung werden alle Störkräfte vollkommen beseitigt, während nach der statischen Auswuchtung noch die Fliehkräfte P_1, P_2 und $P_g = M_g r' w^2$ vorhanden sind.

Unsere weitere Aufgabe wird die Untersuchung sein, in welcher Weise die Kraft P_g das Fliehkraftkreuz $P_1 P_2$ beeinflußt. Dieser Einfluß ist in hohem Maße davon abhängig, an welchem Punkte der Drehkörperkante MN das statische Ausgleichgewicht angebracht wird. Wir wollen nun untersuchen, welcher Punkt der Drehkörperkante als Angriffspunkt der Kraft P_g die günstigsten Verhältnisse schafft. Zu diesem Zwecke beachten wir die Größe der Momente der drei Fliehkräfte um die Lager L_1 und L_2. Denn diese Momente, nennen wir sie Rüttelmomente, sind ein Maß der Beanspruchung von Welle und Lager durch die im Betrieb auftretenden Störkräfte.


Abb. 12

Legt man durch M_g und die Drehachse die Ebene (Abb. 12), so sind die Momente $M_g x_1$ und $M_g x_2$ bestenfalls imstande, die Momente $P_1 l_1 \cos \eta$, $P_2 l_3 \cos \vartheta$, $P_1 l_2 \cos \eta$ und $P_2 l_4 \cos \vartheta$ aufzuheben, während die Momente

$$P_1 l_1 \sin \eta, \; P_1 l_2 \sin \eta, \; P_2 l_3 \sin \vartheta, \; P_2 l_4 \sin \vartheta$$

nach der statischen Auswuchtung stets noch wirksam bleiben und nur durch dynamische Auswuchtung beseitigt werden können. Die durch x_1 und x_2 gekennzeichnete Lage von M_g ist also am günstigsten, wenn unter Berücksichtigung der Gl. (23)

$$x_1 P_1 \cos \eta + x_1 P_2 \cos \vartheta = P_1 l_1 \cos \eta + P_2 l_3 \cos \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

$$x_2 P_1 \cos \eta + x_2 P_2 \cos \vartheta = P_1 l_2 \cos \eta + P_2 l_4 \cos \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ist. Bezeichnet man mit $f = x_1 - l_1$ und $g = x_2 - l_4$ die axialen Abstände der Masse M_g von den Ausgleichebenen, so führen beide Gleichungen zu den Bedingungen:

$$\frac{f}{g} = \frac{P_2 \cos \vartheta}{P_1 \cos \eta}.$$

Die durch diese Bedingungsgleichung gekennzeichnete Lage der Masse M_g findet man aus dem Proportionendreieck folgendermaßen (Abb. 13): Man fällt von M das Lot auf P_g. Durch den Fußpunkt D zieht man die Parallele zu P_1, die p_1 in E schneidet. Durch E zieht man die Parallele zu p_1, die die Strecke IH in F schneidet. F teilt die Strecke IH, wie die günstigst angebrachte Masse M_g die axiale Drehkörperlänge im

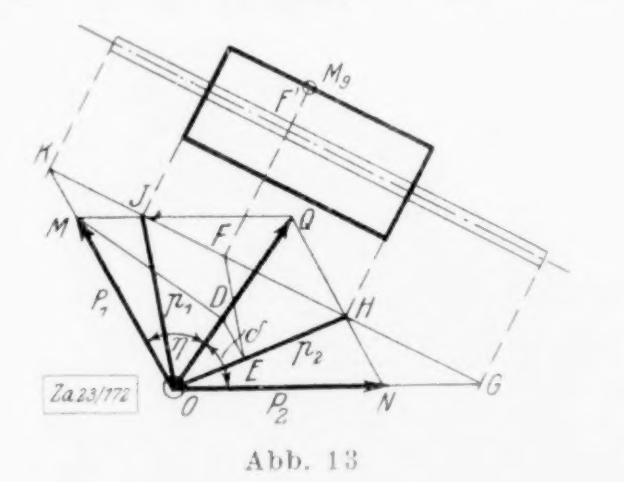

Abb. 13

Abb. 14

Verhältnis $f:g$. Es sei darauf hingewiesen, daß diese Beziehungen nicht unmittelbar praktisch verwendet werden können, da man ja zu Beginn der statischen Auswuchtung die Kräfte P_1 P_2 nicht kennt. Die Ueberlegung sollte lediglich zu einem vergleichenden Urteil über die Leistungsfähigkeit der statischen und dynamischen Auswuchtung aus ihren mechanischen Grundlagen anleiten. In diesem Sinne müssen wir sie noch zu Ende führen und nach der Größe der restlichen Rüttelmomente fragen, wenn M_g an einem anderen Punkte als F' angebracht wird.

Wir vereinfachen die Aufgabe dadurch, daß wir (Abb. 14) in der Ebene E_2 die Kräfte $+P_1$ und $-P_1$ anbringen. Wir erhalten dann das Kräftepaar $P_1\,l_m$ und in der Ebene E_2 als Resultante aus den Kräften P_1 und P_2 die Kraft $-P_g$. Die Größe der Resultante ergibt sich aus der Ueberlegung, daß das Kräftepaar $P_1\,l_m$ durch die Einzelfliehkraft des statischen Ausgleichgewichtes nicht beseitigt werden kann, daß also das Kraftkreuz P_1 P_2 sich aus dem Kräftepaar $P_1\,l_m$ und der Einzelkraft $-P_g$ in der Ebene E_2 zusammensetzen muß. Es wird also genügen, zur Beurteilung der Größe der restlichen Rüttelmomente mit dem Vorhandensein nur einer Einzelkraft (etwa $-P_g$) in der Ebene E_2 zu rechnen. Das Minimum der Rüttelmomente ist Null, wenn das statische Ausgleichgewicht zufällig in die Ebene E_2 hineinverlegt wird, das Maximum liegt vor, wenn es in die Ebene E_1 gerät. In diesem Fall ist das restliche Rüttelmoment von der Größe $P_g\,l_m$.

Aus Abb. 14 ist ersichtlich, daß die Summe der Rüttelmomente der Einzel-Störkraft (also des statisch unausgewuchteten Drehkörpers) die Größe $P_g(l_4+l_3)=P_g l$ besitzt. Die statische Auswuchtung verbessert also stets das allgemeine Gleichgewicht mindestens um den Betrag $P_g\,(l-l_m)$. Man sieht aber, daß der Restfehler um so größer sein kann, je enger der Drehkörper gelagert ist, je mehr sich also der Wert l_m dem Werte l nähert. Enge Lagerung ist aber das Bestreben jedes Konstrukteurs. Für $l_m = \sim l$ kann der Fall eintreten, daß die statische Auswuchtung, abgesehen von dem Störkräftepaar, das sie überhaupt nicht beseitigen kann, auch die Wirkung der Einzelkraft kaum vermindert und daß nach der statischen Auswuchtung der Fehler der Massensymmetrie ebenso groß ist, wie vor der statischen Auswuchtung. Diese Unsicherheit betreffs ihres Ergebnisses macht im Verein mit der Unmöglichkeit, Störkräftepaare durch sie beseitigen zu können, die statische der allgemeinen Auswuchtung unbedingt unterlegen, die mit in einem Arbeitsgang das statische, wie das dynamische Gleichgewicht am Drehkörper herstellt und damit den Drehkörper im Betriebe störkräftefrei macht. Auf Grund dieser Ueberlegungen halten wir eine Vergleichung der auf konstruktiven Besonderheiten beruhenden Auswuchtgenauigkeit der statischen und allgemeinen Auswuchtmaschinen für nicht erforderlich.

5. Durchführung eines Versuches. Die nachfolgend beschriebene Auswuchtung wurde an einer Trommel (Abb. 15) durchgeführt, deren Masse $l_m = 678$ mm, $r = 76$ mm waren. Die Montage in der Auswuchtmaschine ist durch folgende Größen gegeben: $l_1 = 67$, $l_2 = 748$, $l_3 = 745$, $l_4 = 70$, $l = 815$. Die Welle lief in Kugellagern. Die Gleichklangdrehzahl lag bei etwa 450 Uml./min. Der Antrieb erfolgte über ein ausrückbares Zahnradvorgelege. Die Ausschläge der Lager wurden 1 : 8 vergrößert am Schwingungsmesser mit Blei auf Diagrammpapier aufgenommen. Der Schreibstift am Schwingungsmesser des Lagers L_1 hatte etwa 0,25 mm, der des Lagers L_2 etwa 0,5 mm totes Spiel.

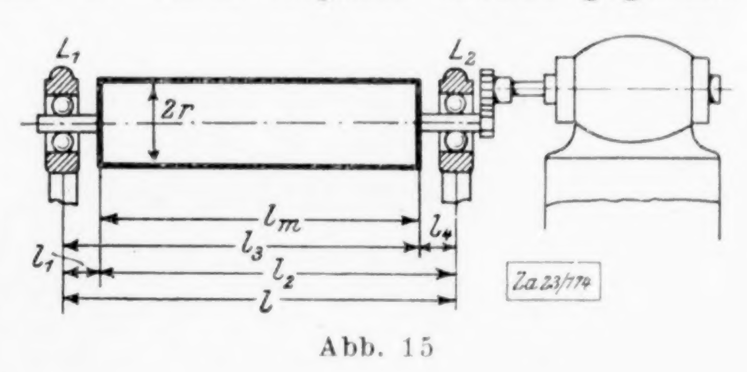


Abb. 15

Das angewandte Auswuchtverfahren war das in **2** beschriebene:

1. Durch ein Kranzverfahren wurde während der Drehschwingungen um das Lager L_2 die Masse m_1 in der Ebene E_1 bestimmt (vergl. Abb. 4). Die Masse blieb am Drehkörper.
2. Durch ein weiteres Kranzverfahren wurde während der Drehschwingungen um das Lager L_1 die Masse m_n bestimmt (vergl. Abb. 7).
3. Mittels der Formeln (12), (13) wurden die Massen M_2 und m_a berechnet (vergl. Abb. 7).

Die Durchführung der Auswuchtung im einzelnen gestaltete sich folgendermaßen: Der Kranz der Ebene E_1, die mit der Stirnebene des Drehkörpers zusammenfiel, war in 12 gleiche Teile geteilt. Die Teilpunkte wurden 1, 2, 3, 4, 5 usw. genannt. An diesen Teilpunkten wurde nacheinander eine Masse m_x vom Gewicht 32,4 g angebracht und bei

jeder Gewichtsstellung der Gleichklangausschlag im Auslauf am Schwingungsmesser gemessen. Zwischen jeder Messung mußte zwecks Versetzung des Gewichtes der Drehkörper stillgesetzt werden, da das Zahnradvorgelege ein Einrücken des Antriebes während des Laufes nicht gestattete, also der erwähnte Hilfsapparat zur Verstellung des Gewichtes während des Laufes nicht verwendet werden konnte. Die Ausschlagsgrößen wurden in 10facher Vergrößerung als Ordinaten über dem abgewickelten, im Maßstab 1 : 2 gezeichneten Kranzumfang als Abszisse aufgetragen und ergaben die Kurve $k-k$ der Abb. 16. Der Minimumpunkt A der Kurve fiel zufällig mit dem Teilpunkt 12 zusammen. Ihm entsprach der Punkt 12 am Kranz, an dem das Gewicht von der Masse m_1 angebracht werden mußte. Dann wurde der Ausschlag a_1 gemessen, den der unausgewuchtete Drehkörper ohne Zusatzgewicht hervorrief. Im 10fachen Abstand seiner Größe wurde die Parallele zur Abszisse gezogen, die die Kurve $k-k$ in den zum Punkte A symmetrisch liegenden Punkten Z_1 Z_2 schnitt (Abb. 16). Der Strecke $Z_1 Z_2$ entspricht ein Winkel $2\alpha = 151^0$ am Kranzumfang der Ebene E_1 und ein Wert $\frac{1}{2\cos\alpha} = 1{,}98$. Daraus ergibt sich für die Masse m_1 ein Gewicht von $1{,}98 \cdot 32{,}4 = 62{,}4$ g, das, am Teilpunkt 12 der Ebene E_1 angebracht, die Drehschwingungen um das Lager L_2 tatsächlich vollkommen beseitigte.

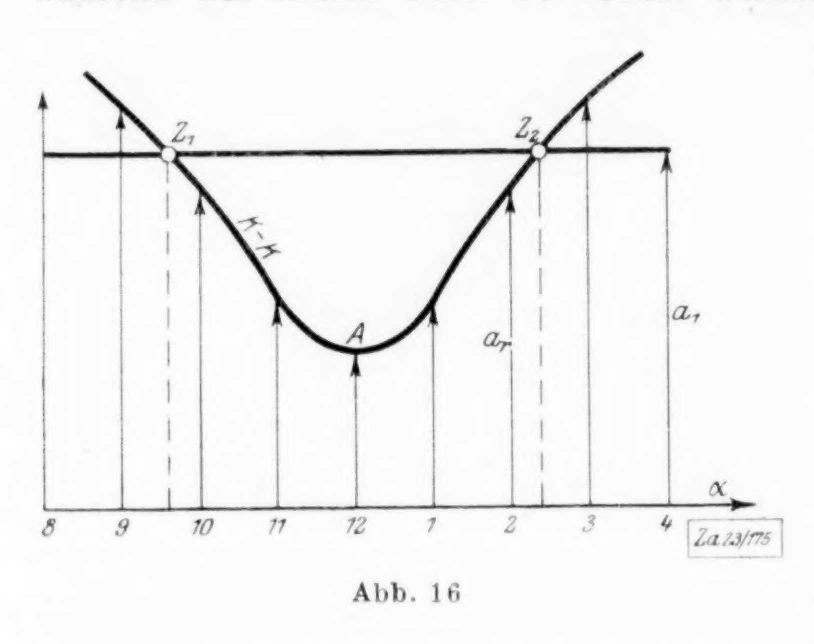


Abb. 16

2. Das Lager L_1 diente nun als Drehlager. In gleicher Weise wurde nach dem Kranzverfahren die Masse m_n nach Größe und Lage in der Ebene E_2 ermittelt. Ihr Gewicht ergab sich zu 43,5 g. Die zur Ermittlung dienende Kurve $k-k$ ist hier nicht wiedergegeben worden.

3. Unter Berücksichtigung der Montagegrößen $l_1, l_2 \ldots$ ergeben sich die Quotienten der Formeln (12), (13) zu: $\frac{l_2 l_3}{l\, l_m} = 1{,}012$; $\frac{l_3 l_4}{l\, l_m} = 0{,}093$.

Die Gewichte G_2 und g_a der Massen M_2 und m_a berechnen sich damit zu

$$G_2 = 1{,}012 \cdot 43{,}5 = 44 \text{ g}, \qquad g_a = 0{,}0093 \cdot 43{,}5 = 4{,}045 \text{ g}.$$

Gewicht G_2 wurde an Stelle der Masse m_n, Gewicht g_a in der Ebene E_1 um 180^0 gegen G_2 versetzt angebracht. Der Drehkörper war ausgewuchtet und zeigte auch bei Oeffnung beider Lager keinerlei Schwingungen mehr.

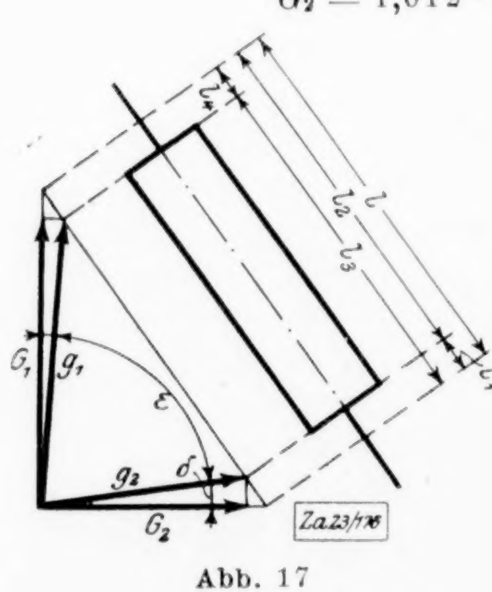


Abb. 17

Zur Kontrolle wurde mit den Größen der 3 Gewichte g_1, g_a, G_2 und dem Winkel $\zeta = \delta + \varepsilon$ zwischen g_1 und G_2 $\zeta = 84^0$ das Proportionendreieck (Abb. 17) gezeichnet. Es ergab sich vollkommene Uebereinstimmung, die daran zu erkennen war, daß die Gewichtsstrecken die Schlußseite des Proportionendreiecks im gleichen Verhältnis teilten, wie die Ausgleichebenen den Lagerabstand. Da der Drehkörper zylindrisch war, also die Kranzradien der beiden Ausgleichebenen gleich groß waren, brauchten sie bei der Zeichnung des Proportionendreiecks nicht berücksichtigt werden. Die Ausgleichgewichte konnten den Fliehkräften in beiden Ebenen in gleicher Weise proportional gesetzt werden.

Wenngleich der Drehkörper nun keine Schwingungen mehr zeigte, so war doch zunächst nicht die Gewähr gegeben, ob nicht noch Störkräfte am Drehkörper angriffen, die aber infolge Reibung oder Dämpfung nicht zur sichtbaren Auswirkung kamen. Um dies zu untersuchen, wurde je ein Gewicht am ausgewuchteten Drehkörper in beiden Ausgleichebenen bestimmt, das einen eben noch sichtbaren Ausschlag hervorrief. In beiden Fällen genügte hierzu ein Gewicht von 0,5 g. Der im Drehkörper infolge Reibung oder Dämpfung zurückgebliebene Massenfehler war also sicherlich kleiner als 0,5 g, d. h. die Auswuchtung hatte in der Ebene E_1 mindestens 99,2 vH, in der Ebene E_2 mindestens 98,9 vH des vorhandenen Fehlers beseitigt. Durch Anwendung eines besseren Schreibgerätes hätte sich dieser Höchstfehler noch erheblich herabdrücken lassen können. 254

Über die Bewegung von Kugeln in ruhenden Flüssigkeiten.[1]

Von **P. HIRSCH** in Göttingen.

(Mitteilung aus dem Institut für angewandte Mechanik an der Universität Göttingen.)

Das Verhalten eines tropfbar flüssigen oder luftförmigen Mediums, in dem ein fester Körper unter der Wirkung einer nach Größe und Richtung konstanten Kraft sich frei bewegen kann, ist noch wenig bekannt. Nur über einige Sonderfragen, die in dieses Gebiet gehören, liegen Versuche vor und diese betreffen meist technisch wichtige Fälle. Das Verhalten der einfachsten Körperformen ist noch fast gar nicht untersucht. Wenn ein systematisches Angreifen dieses Problems gerade mit der Kugel begonnen wird, so ist dafür nicht allein maßgebend, daß sie der geometrisch einfachste Körper ist, sondern auch der Umstand, daß die Potentialbewegung um dieselbe bekannt ist. Denn die Hauptfrage, auf deren Beantwortung die in diesem Rahmen ausgeführten Versuche abgestellt sind, lautet: Hat bei Beginn der Bewegung die sog. scheinbare Masse[2]) den aus der Potentialbewegung errechneten Wert?

Die Beschränkung auf diese Fragestellung war durch den Umstand gegeben, daß die verwendete Versuchseinrichtung eine Beschleunigung auch bei verschwindend kleiner Geschwindigkeit gut zu messen gestattet, wogegen wiederholtes Photographieren der Kugel auf ein und dieselbe feststehende Platte für andere Bereiche des Vorganges vorteilhafter erscheint[3]). Genauere Aufschlüsse über die Einzelheiten der Strömung sind von Oberflächenaufnahmen des Wassers, durch welches eine zur Hälfte eingetauchte Kugel geschleppt wird, zu erwarten.

Die Versuche wurden im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen im Jahre 1911 ausgeführt. An experimentellen Hilfsmitteln stand in erster Linie ein kinematographischer Aufnahmeapparat zur Verfügung. Die kinematographischen Meßvorrichtungen wurden gelegentlich dieser Versuche geschaffen, deren wesentlicher Nebenzweck war, Aufschluß über die Verwendbarkeit des Kinematographen zu Beschleunigungsmessungen zu erhalten.

1. Die Leipziger Versuche. Von bereits veröffentlichten Versuchen sind nur die im physikalischen Institut der Universität Leipzig von Schiller und Döge ausgeführten zu erwähnen[4]). Sie benutzten Pilotballone, welche sie in gleichen Intervallen,

---

[1]) Diese Arbeit ist von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation genehmigt worden, Referent: Prof. Dr. Prandtl. Die Versuche wurden in den Jahren 1909 bis 1911 im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen ausgeführt. Dem Verfasser ist es eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Prandtl seinen innigsten Dank auszusprechen für die Stellung der Aufgabe, sein andauerndes Interesse an dem Fortschreiten der Arbeit und die Zur-Verfügung-Stellung der Hilfsmittel seines Institutes.

[2]) Scheinbare Masse eines in der Flüssigkeit bewegten Körpers heißt der Quotient der an ihm angreifenden äußeren Kraft (ohne Berücksichtigung der Flüssigkeitskräfte) durch die tatsächliche Schwerpunktsbeschleunigung, vermindert um die wirkliche Masse des Körpers. Eine einfache Energiebetrachtung zeigt, daß die scheinbare Masse bei Potentialbewegung stets positiv ist. Die durch die Masse der vom Körper verdrängten Flüssigkeit dividierte scheinbare Masse ist eine dimensionslose Zahl, die »relative scheinbare Masse« des Körpers Bei Kugeln in reibungslosen Flüssigkeiten beträgt sie bekanntlich $1/2$. Weicht die Richtung der Beschleunigung des Körpers von derjenigen der äußeren Kraft ab, so soll im folgenden der Ausdruck »Scheinbare Masse« vermieden werden.

[3]) Man vergleiche die nachstehend besprochenen Leipziger Versuche.

[4]) Schiller und Döge, Widerstands- und Beschleunigungsmessungen an frei steigenden Pilotballonen mittels photographischer Registrierung. Physikal. Ztschr. I., S. 234, 1912.

Nach Niederschrift der vorliegenden Arbeit erschien noch eine Arbeit von F. S. Schmidt, Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln. Diss. Leipzig 1919. Schmidts Versuche setzen die vorher genannten fort. Außer Pilotballonen photographierte er auch im Wasser fallende metallbeschwerte Wachskugeln. Unter seinen interessanten Ergebnissen ist vor allem neu die Beobachtung eines Geschwindigkeitsmaximums vom 0,86 fachen und eines darauf folgenden Minimums vom 0,815 fachen der Endgeschwindigkeit bei allen Starten. Durch Färbung der Grenzschicht konnte die Abhängigkeit dieses Geschwindigkeitsverlaufes von Bildung, Wachsen und Ablösung eines Wirbelringes nachgewiesen werden.

Schmidt hat alle Versuche, bei denen starke seitliche Abweichung eintrat, als fehlerhaft eliminiert. Diese Auswahl der Versuche kann etwas veränderte Endergebnisse zur Folge haben im Vergleich zur vorliegenden Arbeit, bei welcher die Seitenabweichung als Eigentümlichkeit des Startvorganges betrachtet wurde. Deshalb wird der Unterschied in der Bewertung der einzelnen Versuche bei einem späteren Vergleich der beiden Arbeiten zu berücksichtigen sein.

etwa Halbsekunden, auf ein und dieselbe Platte photographierten, und genau gleichzeitig auf eine zweite Platte von einer zur erstgenannten ungefähr senkrechten Richtung aus. Steigkraft und Ballondurchmesser bestimmten sie vor und nach den Versuchen und interpolierten nach der Zeit. Aus der nach langer Zeit erreichten Geschwindigkeit bestimmten sie zunächst zwei Größen a und α in der Beziehung: Widerstand $= a F \varrho v^{\alpha}$, worin F den Flächeninhalt des Aequators bedeutet. Dann definierten sie eine »äquivalente Masse«

$$M' = \frac{P - a F \varrho v^{\alpha}}{\frac{dv}{dt}}.$$

Die aus den Leipziger Versuchen berechnete »äquivalente Masse« unterscheidet sich in zweifacher Beziehung von der in der Einleitung der vorliegenden Arbeit definierten »scheinbaren Masse« [1]). In der äquivalenten Masse ist die wirkliche Masse der Kugel und ihres Inhaltes mit enthalten, in der scheinbaren Masse nicht. Ferner wird bei Berechnung der äquivalenten Masse zunächst ein Betrag abgezogen, welcher dem Bewegungswiderstand bei der gleichen, aber seit langer Zeit konstanten Geschwindigkeit entspricht. Für die Größe dieses Widerstandes ist aus den bei den Versuchen nach langer Zeit erreichten Vertikalgeschwindigkeiten eine Potenzformel gewonnen worden. Gegen dieses Verfahren ist nichts einzuwenden, solange nur der Zweck verfolgt wird, die Versuchsergebnisse durch Zahlenangaben zusammenzufassen. Dagegen erscheint es bedenklich, aus einer so gewonnenen Faustformel den erwähnten Abzug bei Berechnung der äquivalenten Masse zu entnehmen, denn dies bedeutet eine Extrapolation, und zwar für eine Funktion, deren Nichteinfachheit experimentell nachgewiesen ist. Davon abgesehen läßt sich gegen den Abzug überhaupt noch einwenden, daß er der Vorstellung eines vollständig abweichenden Strömungsvorganges entnommen und deshalb die Versuchsergebnisse zu entstellen geeignet ist.

Von der unmittelbaren Reibung abgesehen ist der Widerstand des Integral des durch die Flüssigkeitsbewegung bestimmten Oberflächendruckes. Seine Zerlegung in zwei Teilbeträge, von denen der eine als durch die Geschwindigkeit und der andere durch die Beschleunigung verursacht gelten kann, würde daher eine physikalische Vorstellung voraussetzen, welche den Bewegungszustand als aus einer gleichförmigen Bewegung und einer Modifizierung derselben infolge der Beschleunigung darzustellen gestattet. Solange eine solche Theorie fehlt, kann eine Abtrennung des durch die beschleunigte Bewegung verursachten Widerstandes nur nach willkürlichen Formeln erfolgen, wovon ein neuer Einblick in den Vorgang nicht zu erwarten ist [2]).

Einzig der kleine Teilbetrag, welcher das Integral der Tangentialkomponenten der Oberflächenkräfte darstellt, ist einer gesonderten näherungsweisen Berechnung zugänglich, und zwar mittels der Grenzschichtentheorie [3]). Eine sehr rohe vergleichsweise Abschätzung bei Besprechung der Göttinger Versuche ergibt, daß der Reibungswiderstand im allerersten Bewegungsstadium, auf einem Wege von etwa einem halben Ballonradius, gegenüber den Versuchsfehlern verschwindet [4]).

In bezug auf Genauigkeit der Kugelform sind die Leipziger den Göttinger Versuchen vermutlich überlegen, und bei der genaueren Auswertbarkeit einer Aufnahme auf feststehender photographischer Platte gegenüber einer Kinoaufnahme dürften mit der Leipziger Versuchsanordnung noch Aufschlüsse über den mittleren Bereich des Startvorganges zu erhalten sein [5]).

---

[1]) Der Ausdruck »scheinbare Masse« wurde in der Leipziger Arbeit vermieden, weil er in der Physik bereits eine andere Bedeutung gewonnen hat. Demgegenüber sei darauf hingewiesen, daß es sich in jenem Falle um die scheinbare Masse eines Elektrons im elektrischen Feld, im vorliegenden Falle um die scheinbare Masse eines Körpers im hydrodynamischen Felde handelt, also in beiden Fällen um einen einem Vektorfelde eigentümlichen Skalar mit einer in beiden Fällen ganz analogen physikalischen Bedeutung. Diese Analogie zu betonen, ist mit der Verwendung des gleichen Ausdruckes beabsichtigt.

[2]) Vergl. auch die Bemerkung in Abschn. 7 »Der Startvorgang«.

[3]) Prandtl, Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. des III. Internat. Mathematiker-Kongresses 1904. Leipzig 1905.

[4]) Abschnitt 6 vorliegender Arbeit.

[5]) In der Einleitung der Arbeit von Schiller und Döge wird auf die praktische Bedeutung der Untersuchung der äquivalenten Masse für die Freiballonfahrt hingewiesen. Nun ist gerade der sowohl bei den Leipziger wie den Göttinger Versuchen vorliegende Fall des Startes ohne Seitenwind

2. Die Göttinger Versuche, Versuchsanordnung. Den im folgenden besprochenen Startversuchen mit Kinderballonen gingen solche mit einem Freiballon von 1437 cbm voraus; sie wurden beim Start zweier vom Niedersächsischen Verein für Luftfahrt veranstalteter Aufstiege vorgenommen. Die Messung des zurückgelegten Weges erfolgte beim einen Aufstieg mittels Kinematographen von der Erde aus, das andere Mal mittels eines mitgeführten Stationsbarographen; aus dessen Triebwerk waren Unruhe und Ankergang entfernt und durch einen rotierenden Flügel ersetzt worden, so daß die Trommel in weniger als zwei Minuten einmal umlief. Daß diese Versuche ergebnislos verliefen, lag erstens an der unsicheren Bestimmung der Steigkraft, zweitens an der Unruhe der freien Atmosphäre.

Bei den Versuchen mit Kinderballonen wurde der zurückgelegte Weg mittels kinematographischer Aufnahme gemessen, die Zeit mittels eines auf Kugellagern laufenden Schwungrades. Eine an ihm befestigte hundertteilige Skala, sowie ein dazugehöriger feststehender Nonius wurde bei der Kinoaufnahme mitphotographiert, während die Geschwindigkeit des Rades durch Vergleich mit einer Pendeluhr mittels eines elektrischen Chronographen festgestellt wurde. Einzelheiten der Versuchsanordnung, soweit sie die kinematographische Meßtechnik betreffen, sind im Anhange: »Das Arbeiten mit dem Kinematographen« zusammengestellt.

Schwierigkeiten macht die Bestimmung der Steigkraft, da sie während des Startes veränderlich ist. Diese Veränderlichkeit kommt davon, daß der vor dem Start durch Strahlung stark erhitzte Ballon mit dem Beginn der Bewegung durch die an ihm vorbeigleitende Luft abgekühlt wird und dadurch an Größe abnimmt.

Für die Temperatur des Versuchsballons vor dem Start besteht Strahlungsgleichgewicht, genau wie für die eines im Gleichgewicht befindlichen Freiballons[1]). Für letzteren sind die Temperatureinflüsse wegen ihrer praktischen Wichtigkeit eingehend untersucht worden[2]). Bei mehreren Freiballonfahrten hat Schmauß die Temperaturen von Außenluft und Füllgas fortlaufend registriert. Er fand in Gleichgewichtslagen die Gastemperatur, übereinstimmend mit der gleichzeitigen Angabe eines Schwarzkugelthermometers, bis zu 36 Grad über der Lufttemperatur. Den Einfluß der mit der Bewegung des Ballones einsetzenden Ventilation fand er wesentlich geringer als früher angenommen wurde. Immerhin bleibt die eigentümliche einseitige Labilität des Gleichgewichts eines Freiballones, sowie ihre Umkehrung bei Nacht als Tatsache bestehen und beweist die Existenz einer gewissen Ventilationswirkung. Der genaue Beweis hierfür wurde durch den Göttinger Kinderballonversuch Nr. 11 erbracht, bei welchem das Durchfallen des Ballones aus einer Gleichgewichtslage kinematographisch aufgenommen wurde. Denn bei diesem Laboratoriumsversuch in kleinem Maßstabe kommt eine Strahlungsabnahme mit der Höhe nicht in Frage. Noch deutlicher zeigte der Startversuch Nr. 7 die außerordentlich schnelle Ventilationswirkung; der Ballon startete bei diesem Versuch mit guter Steigkraft, kehrte aber bereits um, nachdem er kaum einen Ballondurchmesser zurückgelegt hatte.

Dieser Schwierigkeit in der Bestimmung der Steigkraft wurde durch folgende Maßnahmen begegnet: Bei allen Versuchen war der Ballon der direkten Sonnenstrahlung möglichst entzogen, er erschien im Bilde immer dunkel auf hellem Hintergrund. Außerdem haben Kinderballone die in diesem Falle vorteilhafte Eigenschaft, daß sie sich mit geringem elastischen Widerstand bis zu einem gewissen Volumen aufblasen lassen, dann aber »voll« sind, so daß eine weitere Ausdehnung ganz erhebliche Drucksteigerung erfordert. Ferner wurden die zur exakten Auswertung bestimmten Versuche mit möglichst großer Steigkraft ausgeführt. Schließlich wurde die direkte Bestimmung der letzteren

---

für den Freiballonfahrer ohne Interesse, der ja in diesem Falle mit beliebig kleiner Steigkraft starten kann.

Für den Start mit Wind wird folgende Betrachtung allen praktischen Bedürfnissen genügen, welche der Verfasser bei einer Besprechung im Niedersächsischen Verein für Luftfahrt angegeben hat: Die Anfangstangente der Bahn des startenden Ballons muß mit der Richtung der Resultierenden aller auf den Ballon wirkenden Kräfte zusammenfallen. Diese Kräfte sind die Steigkraft und der vom Wind auf den Ballon ausgeübte Widerstand. Das Verhältnis dieser beiden Kräfte ist also gleich dem Tangens des Elevationswinkels, unter welchem der Ballon den Boden verläßt.

[1]) Nach Emden, Zur Füllungstemperatur eines Freiballons. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl. 1912, S. 315.

[2]) Schmauß und v. Bassus, Zur Gastemperatur des Freiballons. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl. 1911, S. 216.

durch Wägung vor dem Start ausschließlich für die allererste Wegstrecke, etwa ein Viertel Ballondurchmesser, benützt.

Bei allen anderen Versuchen war vorgesehen, die Steigkraft aus der vom Ballon nach langer Zeit erreichten Vertikalgeschwindigkeit zu berechnen. Indessen wurden die Versuche der letzteren Art überhaupt nur zur Bestimmung der Bahn verwertet.

Ueber Versuchsanordnung und Meßbereich orientieren die auf Bild 4 wiedergegebenen Filmproben.

Die erste Anordnung, für die Versuche Nr. 1 bis 9, umfaßte einen Weg von nicht ganz zwei Metern oder etwa zwanzig Ballondurchmessern. Der Ballon war vor dem Start durch einen Elektromagneten unten festgehalten, wurde also durch Oeffnen des Magnetstromes gestartet.

Diese Versuche zeigten ein Abweichen des Ballones von der Vertikalen. Zuerst wurden Luftströmungen als Ursache vermutet. Deshalb wurden alle Fensterfugen vollständig verkittet und die Türspalten sorgfältig abgedichtet. Dann wurden mittels Tabakrauches die Luftströmungen im Versuchsraum bei verschiedenem Stand der Sonne untersucht und danach der Versuchsort innerhalb des Zimmers gewählt. Es hatte sich gezeigt, daß, falls man für etwas stabile Schichtung der Luft sorgte, und nachdem seit der Vorbereitung des Versuches eine halbe Stunde vollständige Ruhe im Lokal geherrscht hatte, die gesamte Luftbewegung sich auf ein Hin- und Herwogen beschränkte, etwa wie das Schwanken des Wassers in einem Waschbecken. Die Schwingungsdauer dieser Bewegung war etwa von einer Minute aufwärts bis zu mehreren Minuten, die Amplitude war an der Fensterwand sowie an der gegenüberliegenden in etwa halber Zimmerhöhe am größten, sie betrug dort bis zu etwa 20 cm. Das ergibt am gleichen Orte größte Vertikalgeschwindigkeiten von etwa 2 cm/sk, am Versuchsort selbstverständlich nur einen sehr kleinen Bruchteil dieses Wertes.

Bei der zweiten Versuchsreihe, welche die Versuche Nr. 10 bis 21 umfaßt, wurde nun die Luft vor dem Versuche mittels Rauches beobachtet und der Start in einem Augenblicke ausgeführt, wo die Luftbewegung einen Kulminationspunkt erreicht hatte. Der Bildmaßstab war gegenüber der ersten Versuchsanordnung erheblich vergrößert, die verwertbare Meßstrecke betrug im Mittel acht Ballondurchmesser. Der Ballon wurde nicht nur von vorne, sondern auch mittels eines großen Spiegels von der Seite aufgenommen, so daß auf jedem Filmbildchen die beiden Ballonbilder nebeneinander stehen, wie in Abb. 1a—c zu sehen ist.

Die dritte Versuchsanordnung beschränkte die Meßstrecke auf reichlich einen halben Ballonradius, ein Millimeter auf dem Filmbildchen entsprach genau 25 Millimeter am Versuchsort. Der die Seitenansicht des Ballones liefernde Spiegel wurde wieder entfernt; alle Vorsichtsmaßregeln gegen Luftbewegungen: Verkittung der Fensterfugen, Abdichtung der Türspalten, halbstündige Ruhe vor dem Versuch wurden beibehalten, jedoch die Beobachtung der Luft vor dem Start unterlassen. Letzteres auf Grund folgender Erwägung:

Nach den bereits gewonnenen Erfahrungen bleibt die Geschwindigkeit der Luftschwankungsbewegung am Versuchsort selbst dann, wenn der Startmoment auf das Geschwindigkeitsmaximum fallen sollte, so gering und die dabei erreichte Reynoldssche Zahl so klein, daß die Ausweichbewegung der Luft um den Ballon herum noch in rein laminarer Weise erfolgt. Eine Ausbreitung der Störung in größere Entfernung vom Ballon unterbleibt dann und derselbe findet im Augenblick des Startes eine wesentlich ruhige, nur in langsamer gleichförmiger Vertikaltranslation befindliche Luft vor, also Ver-

Abb. 1a bis 1c
Filmproben
für die drei Versuchsanordnungen.

hältnisse, welche die Voraussetzungen für eine der Potentialbewegung wesentlich entsprechende Strömungsform nicht beeinträchtigen.

Aus allen früheren Versuchen hatte sich unter den hundert vorhandenen Ballonen einer durch gute Form ausgezeichnet. Eine Abweichung von der Rotationssymmetrie, ein Unterschied der horizontalen Durchmesser, konnte bei ihm überhaupt nicht gefunden werden, dagegen war er etwas gestreckt, so daß der vertikale Durchmesser um 2,5 vH größer war als ein horizontaler. Dieser Ballon wurde für die Hauptversuche benutzt.

Die Steigkraft wurde mit der Startwage bestimmt, welche in Abb. 2 dargestellt ist. Die Wage war vom Physiologischen Institut der Universität in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt. Auf das eine Gehänge waren oberhalb der Schneide zwei Messingklötze isoliert aufgesetzt, so daß zwischen ihnen etwa ein Zentimeter freier Raum blieb. Die Messingklötze waren durchbohrt, so daß die beiden 0,8 mm dicken Löcher in eine und dieselbe den Wagschneiden parallele Gerade fielen. Durch diese beiden Löcher wurde ein dünner Silberdraht geführt und mittels in die Löcher passender Keile festgeklemmt. Beim Einführen des Silberdrahtes wurde zwischen den beiden Messingklötzen eine am Ballon befestigte Fadenschlinge über ihn gestreift, so daß der Ballon durch Abschmelzen des Silberdrahtes gestartet werden konnte. Die Stromzuführung zu den Messingklötzen erfolgte von der Säule aus durch zwei Streifen aus Stahlblech von 0,05 mm Dicke und etwa 10 mm Breite, dessen Steifigkeit die Wage fast nicht beeinflußte. An Stelle der einen Wagschale war eine kreisrunde Aluminiumplatte horizontal aufgehängt, welche im Innern eines mit Petroleum gefüllten Glaszylinders, dessen Weite etwas größer ist als der Plattendurchmesser war, frei pendelte[1]). Diese Vorrichtung dämpfte die Schwingungen der Wage bis fast zur Aperiodizität.

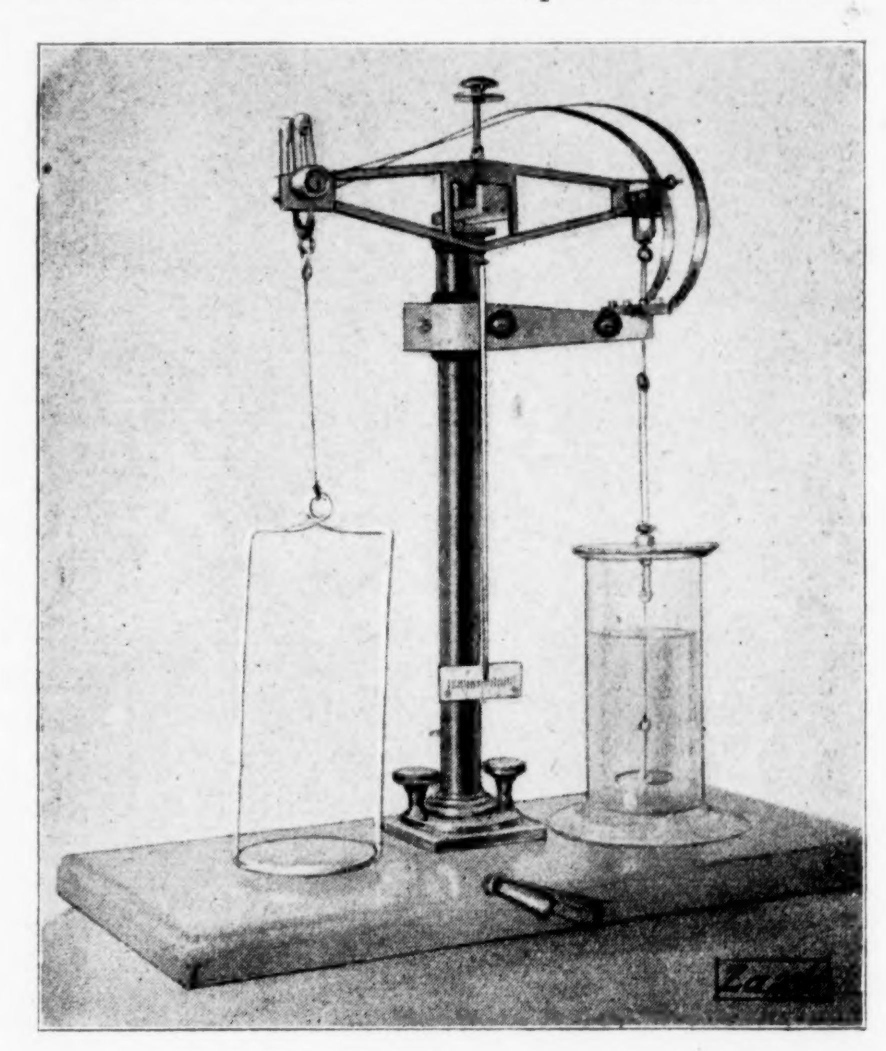


Abb. 2
Startwage.

Die Wage wurde zuerst ohne Ballon austariert, dann mit angehängtem Ballon. Darauf wurde von der unter dem Ballon befindlichen Wagschale soviel Gewicht weggenommen, daß nach etwa einer guten halben Stunde infolge Gasverlustes wieder Gleichgewicht eintrat. Diese Zeit diente zur Beruhigung der Luft im Versuchsraume. Die Wage war etwas stabiler gemacht als sonst üblich, so daß sich die Ballonseite ohne Schwingungen langsam senkte. Unmittelbar vor dem Start wurde die Stellung der Wagzunge abgelesen und zwar vom Versuch 41 an mittels eines Fernrohrs.

3. Auswertung der Göttinger Versuche. Aus den Startversuchen der zweiten Anordnung mit Kinderballonen wurde die Bahn folgendermaßen bestimmt. Auf jedem Filmbildchen wurden die kartesischen Koordinaten mit Maßstab und Lupe gemessen. Und zwar wurde als Ort des Ballonmittelpunktes durchwegs die Mitte zwischen oberem und unterem, sowie zwischen rechtem und linkem Ballonrand angesehen. Durch diese Mittelbildung wurden die größten Fehler ausgeschaltet[2]). Dagegen war die einzelne Aus-

[1]) Die Platte ist nicht sehr gut auf der Abbildung zu erkennen, welche die Wage übrigens in arretiertem Zustande darstellt. In diesem ist das Gefäß durch einen ebenen Glasdeckel geschlossen, welcher mit der Dämpfungsplatte verbunden ist und daher abgehoben wird, sobald man die Wage durch Heben der Mittelschneide) freigibt.

[2]) Man vergleiche im Anhang S. 105.

messung eines Ballonrandes nur auf etwa 0,1 mm genau. Die direkte Ballonphotographie lieferte die X- und die Z-Koordinate, die durch den Spiegel aufgenommene Seitenansicht die Y-Koordinate. Die so bestimmten Werte x, y, z wurden durch Division durch den Ballonradius dimensionslos gemacht. Der Ballonradius wurde aus der Ausmessung der einzelnen Bildchen gemittelt, und zwar für das Spiegelbild gesondert; der etwas verschiedene Abbildungsmaßstab des letzteren ist also berücksichtigt.

Die auf solche Weise erhaltenen dimensionslosen Koordinaten sind dann ohne Ausgleich in die Zeichnung Abb. 3a bis 3c eingetragen worden, zunächst die horizontalen Koordinaten in den Grundriß, aus welchem sich dann erst die Richtung zum Auftragen des Aufrisses ergab.

Abb. 3a bis 3c. Mittelpunktsbahnen (die Pfeile weisen zum Aufnahmeapparat).

Aus den mit der dritten Anordnung gemachten Versuchen wurde die Beschleunigung und weiter die relative scheinbare Masse bestimmt, und zwar auf folgende Weise: Der zurückgelegte Weg wurde wieder als die Mitte zwischen oberem und unterem Ballonrand bestimmt, jedoch durch Ablesung des auf einen mit Millimeterpapier bedeckten Schirm projizierten Bildchens. Der nach Beendigung des Versuches aufgenommene Maßstab wurde auf die gleiche Weise ausgemessen und dadurch die Messung des Weges geeicht.

Das Volumen zur Bestimmung des Deplazementes D wurde als das eines Ellipsoides berechnet. Zu diesem Zwecke war vor Beginn der Versuche der Ballon in zwei zueinander senkrechten Horizontalprojektionen aufgenommen worden, woraus drei zueinander senkrechte Durchmesser bestimmt werden konnten. Da die sämtlichen exakt ausgewerteten Versuche mit dem gleichen Ballon gemacht waren, ist Aehnlichkeit desselben für alle diese Versuche vorausgesetzt worden; das Volumen wurde also der dritten Potenz des vertikalen Durchmessers proportional gesetzt. Jedoch wurden die so gefundenen Deplazemente noch als Funktion der durch Wägung bestimmten Steigkräfte graphisch ausgeglichen.

Als Zeit wurde zunächst die auf jedem Bildchen abgelesene Stellung des Zeitrades, in tausendstel Umdrehungen, betrachtet. Die Geschwindigkeit zwischen zwei photographischen Aufnahmen wurde als Differenzenquotient bestimmt und der mittleren Zeit zwischen den beiden Aufnahmen zugeschrieben. So ergaben sich eine Reihe von Geschwindigkeiten und zugehörigen Zeiten. Aus dieser Reihe wurde nach Ausführung einer graphischen Kontrollauftragung die Beschleunigung nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Diese Kontrollauftragung ergab immer eine gute Gerade[1]), mit einziger Ausnahme des Versuches Nr. 63, welcher ohnehin wegen seiner geringen Steigkraft auszuschalten war[2]).

Zur Bestimmung der Beschleunigung wurde also weder der Ort des Ballons vor dem Start noch der Zeitpunkt des Startes verwendet, um Fehler zu vermeiden, die sich

---

[1]) Abb. 3 zeigt eine solche Auftragung.

[2]) Wegen der Ventilationswirkung, vergleiche man S. 96.

aus nicht ganz plötzlichem Starten, sowie aus der kleinen Vertikalgeschwindigkeit hätten ergeben können, welche der Ballon infolge der Bewegung der Wage schon vor dem Start hatte.

Die Geschwindigkeit des Zeitrades wurde als während des Versuches gleichförmig angesehen[1]) und folgendermaßen bestimmt: Das Zeitrad markierte auf dem Chronographenpapier seine ganzen Umdrehungen, eine Pendeluhr ganze Sekunden, und der Schmelzstrom für den Haltedraht markierte den Startmoment. Aus den beiden erstgenannten Markenreihen ergab sich für jede Sekunde eine Geschwindigkeit des Rades, welche der Sekundenmitte zugeschrieben wurde. Diese Geschwindigkeit wurde in rechtwinkligen Koordinaten als Funktion der Zeit aufgetragen und daraus die Geschwindigkeit in dem durch die Startmarke bezeichneten Augenblick festgestellt. Die so gefundene Umlaufgeschwindigkeit des Zeitrades wurde noch mit einem Korrektionsfaktor versehen, welcher der Ungleichheit der Teilung des Rades Rechnung trug und nach einer ein für alle Male vorgenommenen Eichung aus der im Augenblick des Startes vom Rad eingenommenen Stellung bestimmt wurde.

Darnach konnte die bisher für die Dauer einer tausendstel Radumdrehung als Zeiteinheit berechnete Beschleunigung für die Sekunde als Zeiteinheit umgerechnet werden.

Die so gefundene Beschleunigung b ergab dann die relative scheinbare Masse nach der Formel: $k = \frac{P}{D}\left(\frac{g}{b}+1\right) - 1$.

Das Ergebnis der Versuche Nr. 53 bis 62 ist auf Abb. 4 zusammengestellt. Weggelassen wurden nur unauswertbare Versuche.

Abb. 4

Die relativ scheinbare Masse K aus den Versuchen 53/54

4. Unmittelbare Versuchsergebnisse.

Von den Startversuchen mit Kinderballonen sind die mit der ersten Anordnung gemachten als Vorversuche anzusehen. Bei ihnen zeigte sich die Neigung des startenden Ballones, seine geradlinige Bahn zu verlassen. Dieses Ausweichen wurde zuerst für eine Wirkung störender Einflüsse, in erster Linie von Luftströmungen, gehalten. Deshalb sind die bereits beschriebenen Maßnahmen zur Ausschaltung solcher Einflüsse bei den folgenden Versuchen getroffen worden.

Die mit der zweiten Anordnung gemachten Versuche ergaben erstens[2]), daß die seitliche Abweichung des Ballones keine Folge störender Einflüsse, sondern eine wesentliche Eigenschaft der Bewegung der Kugel ist. Die Bahnkurven zeigen die Ausweichung nach ganz verschiedenen Richtungen im Versuchsraume, womit die Vermutung ausgeschaltet wird, daß die Wirkung des Spiegels als »Wand« von wesentlichem Einfluß sei[3]). Zweitens ergaben diese Versuche das plötzliche Eintreten der Ausweichung nach vorhergehendem geradlinigem Steigen. Drittens lassen die Bahnkurven erkennen, daß die Ausweichung nach Zurücklegung von vier bis fünf Ballondurchmessern beginnt, also unabhängig von der Steigkraft. Viertens zeigt sich, daß die Bahnkurve auch nach dem Verlassen der Geraden noch ein bedeutendes Stück weit eben verläuft; später treten auch doppelte Krümmungen auf, ohne daß eine Gesetzmäßigkeit hierüber zu erkennen wäre.

Die durch Vergleichen der verschiedenen Kurven erhaltenen Schlußfolgerungen gewinnen an Beweiskraft durch den Umstand, daß die Versuche mit verschiedenen Ballonen ausgeführt sind.

Die mit der dritten Versuchsanordnung gewonnenen Ergebnisse sind in Abb. 2 aufgetragen. Als ein Ergebnis dieser Versuche ist der Nachweis der Brauchbarkeit des Kinematographen zu Beschleunigungsmessungen anzusehen. Die größte unberücksichtigte Fehlerquelle ist in der Biegsamkeit der Kontaktfedern am Zeitrad zu suchen.

---

[1]) Man vergl. S. 107 »Bei Beschleunigungsmessungen . . .«

[2]) Die Bahnkurven zeigt Abb. 3. Der Aufnahmeapparat liegt in der Richtung der Y-Achse des Grundrisses.

[3]) Diese Wirkung würde in einer Anziehung der Kugel nach der Wand hin bestehen. Vergl. z. B. Prandtl, Flüssigkeitsbewegung. Handwörterbuch d. Naturwissensch., IV. Bd., S. 136. Jena 1913.

Eine Abhängigkeit der relativen scheinbaren Maße k von der relativen Steigkraft $\frac{P}{D}$ ist nicht zu erkennen. Die Werte von k liegen nahe bei der für die Potentialbewegung gültigen Zahl $1/2$. Die Uebereinstimmung wird noch besser bei Berücksichtigung folgender zweier Korrektionen:

Es soll berechnet werden, wie groß der Einfluß der Abweichung des für die Hauptversuche verwendeten Kinderballones von der Kugelform ist. Ferner soll roh abgeschätzt werden, wie groß der Einfluß der Flüssigkeitsreibung in der Grenzschicht auf das erhaltene Ergebnis war.

5. Die scheinbare Masse eines Rotationsellipsoides. Näherungsformel für nahezu kugelförmige Rotationsellipsoide. Wie erwähnt, ergab die Ausmessung die beiden horizontalen Durchmesser des Ballones als genau gleich, den vertikalen um etwa $2\,1/2$ vH größer als jene. Der durch die Versuche bestimmte Wert von k gilt daher genau genommen nicht für eine Kugel, sondern für einen Körper, der mit guter Annäherung als ein schwach gestrecktes Rotationsellipsoid angesehen werden kann.

Die Berechnung der Potentialströmung um ein Ellipsoid von den Halbachsen a, b, c ist im Prinzip bekannt[1]). Für eine Bewegung des Ellipsoides in der Richtung seiner (a)-Achse ergibt sich die scheinbare Masse zu

$$k = \frac{\alpha}{2-\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

wobei

$$\alpha = abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Beim Rotationsellipsoid ist $b = c$, also

$$\alpha = ac^2\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Das unbestimmte Integral lautet:

$$\frac{2ac^2}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda}} + \frac{1}{2\sqrt{a^2-c^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2+\lambda}-\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{a^2-c^2}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (3\,\mathrm{a}).$$

Zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen ergibt dasselbe dieses:

$$\alpha = \frac{\frac{c^2}{a^2}}{1-\frac{c^2}{a^2}}\left[\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)-\ln\left(1-\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}} - 2\right] \quad \ldots \quad (4\,\mathrm{a}).$$

Das unbestimmte Integral kann aber auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$-\frac{2ac^2}{c^2-a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}}\arccos\frac{c^2-a^2}{c^2+\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \quad (3\,\mathrm{b})$$

und damit

$$\alpha = 2\frac{c^2}{c^2-a^2}\left(1-\frac{\arccos\frac{a}{c}}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4\,\mathrm{b}).$$

Die beiden Ausdrücke (3 a) und (3 b) sind identisch, ebenso die Formeln (4 a) und (4 b).

In (1) eingesetzt ergeben sie:

$$k = \frac{1-\frac{c^2}{a^2}}{1-\frac{1}{2}\frac{c^2}{a^2}\,\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)-\ln\left(1-\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}} - 1 \quad \ldots \ldots \quad (5\,\mathrm{a})$$

[1]) Man findet die Rechnung bei Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 179/180. Leipzig 1907.

beziehungsweise:

$$k = \frac{\frac{c^2}{a^2} - 1}{\frac{c^2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}} \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{c} - 1} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,b).$$

Die beiden Ausdrücke (5a) und (5b) lassen sich formal ineinander überführen; der erstere ist geeignet zur Anwendung auf gestreckte, der letztere für abgeplattete Rotationsellipsoide. Für ein extrem gestrecktes Ellipsoid wird $k = 0$, für die Kugel und die kreisförmige Platte ergeben sich die bekannten Resultate.

Um nun eine handliche Näherungsformel für solche Ellipsoide zu erhalten, welche wenig von der Kugelform abweichen, werde der Logarithmus in der Formel (5a) in eine Potenzreihe nach Potenzen von $1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2$ verwandelt und dann die Größe $1 - \frac{c}{a}$ als »klein« behandelt, also ihre höheren Potenzen vernachlässigt. Es ergibt sich, daß näherungsweise

$$k = \frac{3}{5} \frac{c}{a} - \frac{1}{10} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Diese Formel ergibt sich gleichlautend auch aus (5b).

Bei dem betreffenden Ballon war $\frac{c}{a} = 0{,}975$. Das ergäbe einen Wert $k = 0{,}485$. Die Abweichung desselben von der für die Kugel gültigen Zahl 0,5 ist zu klein gegen die Streuung der Versuchsergebnisse, um aus ihnen nachgewiesen zu werden.

6. Abschätzung der Reibung. Um den Einfluß der Flüssigkeitsreibung auf den experimentell gefundenen Wert von k abzuschätzen, werde die Reibung an der Kugeloberfläche vergleichsweise durch diejenige an der Mantelfläche eines senkrecht zu seiner Achse bewegten Kreiszylinders ersetzt, dessen Durchmesser und Länge beide gleich dem Durchmesser der Kugel sind. Die Oberflächen der beiden Körper sind genau gleich.

Einem Einwand gegen die vergleichsweise Heranziehung des zweidimensionalen Problems soll gleich entgegengetreten werden. Für den Rotationszylinder ergibt nämlich die Potentialströmung eine relative scheinbare Masse $k = 1$, also eine doppelt so große Zahl wie für die Kugel [1]. Für die verschieden starke Einwirkung eines kugelförmigen und eines unendlich breiten Hindernisses auf eine strömende Flüssigkeit ist nun dieser große Unterschied durchaus bezeichnend. Er beruht aber auf der hydrodynamischen Fernwirkung durch den ganzen Raum, während die Mechanik der Reibung sich ausschließlich in der allernächsten Nachbarschaft der Oberfläche abspielt. Ein ähnlich großer Unterschied der Reibungskräfte ist also nicht zu befürchten.

Für das ebene Problem des Kreiszylinders ist die Reibung nach der Prandtlschen Grenzschichtentheorie [2]) von Blasius durchgerechnet [1]. Er findet bei gleichförmiger Beschleunigung b des Rotationszylinders vom Halbmesser r und der Länge l eine Reibungskraft von der Größe

$$4\, r\, l \sqrt{\pi\, \varrho\, \eta\, t} \cdot b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Darnach ist diese bremsende Kraft proportional der Quadratwurzel aus der seit dem Bewegungsbeginn verstrichenen Zeit. Dies würde eine Abnahme der Beschleunigung, also bei der Kontrollauftragung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit eine gegen die Zeitachse konkave Krümmung bedingen [3]. Eine solche ist trotz des glatten Verlaufes dieser Kurven nicht festzustellen.

---

[1]) Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit sehr kleiner Reibung. Zeitschr. f. Math. u. Physik 1908, 1. Uebrigens erhält Blasius für den Rotationszylinder $k = 2$, da er bei Berechnung der Beschleunigung für die Formel $-\frac{dp}{ds} = \varrho \frac{dw}{dt}$ die Beschleunigung seines Koordinatensystems außer acht läßt. Nach Richtigstellung der Berechnung der Beschleunigung ergibt sich auch nach seinem Rechnungsgang $k = 1$.

[2]) Prandtl, Grenzschichtentheorie (7).

[3]) Diese Auftragung ist für alle ausgewerteten Versuche ohnehin ausgeführt worden (vergl. S. 99 oben). Ein Beispiel dieser Auftragung ist auf Bild 3 wiedergegeben.

Auf den rechnerisch gemittelten Wert der Beschleunigung hat die Reibung den gleichen Einfluß wie eine konstante Kraft von der Größe des Mittelwertes R_m der Reibungskraft während der Versuchsdauer, welche für diese rohe Abschätzung vom Startbeginn gerechnet werden möge. Dieser zeitliche Mittelwert ist dann

$$R_m = 4 r l \sqrt{\pi \varrho \eta} \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{t}\, dt \cdot b = \frac{8}{3} r l \sqrt{\pi \varrho \eta T} \cdot b.$$

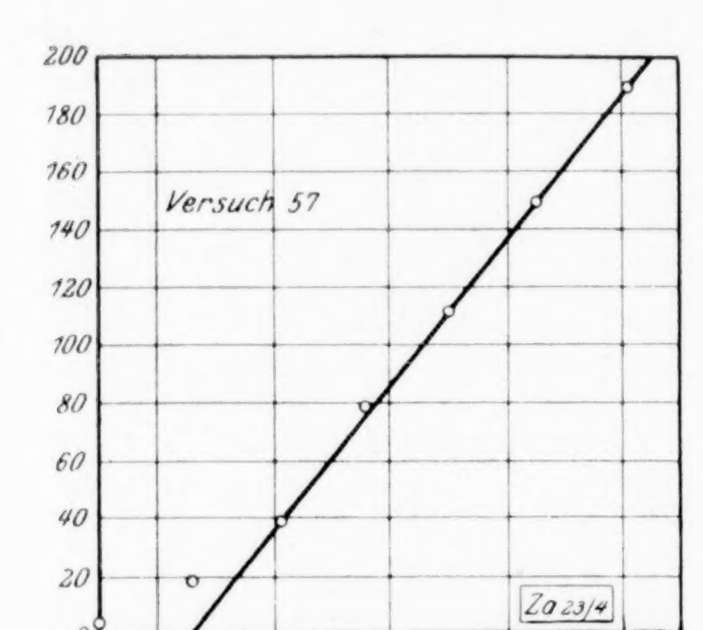


Abb. 6
Eine Kontrollauftragung des zeitlichen Geschwindigkeitsverlaufes in nicht reduzierten Einheiten

Da ferner für den betrachteten Zylinder $l = 2r$ ist, ergibt sich

$$R_m = \frac{16}{3} r^2 \sqrt{\pi \varrho \eta T} \cdot b \quad . \quad . \quad (8).$$

Diese bremsende Kraft wirkt wie eine Verminderung der Steigkraft um den gleichen Betrag. Den aus den Versuchen ermittelten Wert k der relativen scheinbaren Masse erhöht sie um einen Betrag d gegenüber seiner für einen reibungslosen Start gültigen Größe, für welchen die Rechnung ergibt:

$$d = \frac{g}{b} \frac{R_m}{D}.$$

Setzt man hierin den Wert für R_m nach (8) ein und drückt das Deplacement D durch den Kugelhalbmesser aus, so erhält man:

$$d = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \sqrt{\nu T} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Formel (9) gestattet den Wert von d für jeden Versuch zu berechnen. Die Ergebnisse sind nachfolgend zusammengestellt. Der Ballonradius ist für jeden Versuch nach dem Messungsergebnis[1]) eingesetzt. Der Startbeginn ist aus der Kontrollauftragung der Geschwindigkeiten[2]) durch Extrapolation bestimmt und als Schluß des Versuches die Zeit des letzten zur exakten Auswertung verwendeten Bildchens eingesetzt.

Für die kinematische Zähigkeit $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$ ist der Wert 0,157 cm²/sk eingesetzt, welcher aus der Lufttemperatur am Versuchstage von 23,1° C und dem Barometerstand von 751,5 Quecksilbermillimetern bestimmt ist[3]).

Die Rechnung ergibt für die einzelnen Versuche folgende Werte d der Reibungswirkung:

Vers.-Nr.	53	54	57	58	60	62
$d =$	0,048	0,049	0,052	0,060	0,069	0,075

Der Einfluß der Reibung ist also drei- bis fünfmal so groß und von entgegengesetztem Vorzeichen als derjenige der etwas gestreckten Form des Ballones und wie letzterer zu klein gegenüber den Versuchsfehlern, um konstatiert werden zu können.

Immerhin liegen die Punkte, welche die tatsächlichen Versuchsergebnisse darstellen, gut um die Kurve derjenigen Punkte, welche aus dem für die etwas gestreckte Form des Ballones oben errechneten Wert $k = 0,485$ unter Berücksichtigung der Reibung auf Grund vorstehender Rechnung als Versuchsergebnisse zu erwarten wären. Diese Kurve ist in die Zusammenstellung der Versuchsergebnisse eingetragen[4]). Sie hat keinerlei mathematische oder physikalische Bedeutung.

7. Der Startvorgang. Bei den folgenden Betrachtungen über den Startvorgang sei nicht nur rotationssymmetrische Anordnung der Massen, sondern auch Zusammenfallen des Schwerpunktes mit dem Kugelmittelpunkt vorausgesetzt.

[1]) Man vergleiche S.
[2]) Fußnote 3 auf voriger Seite.
[3]) Z. B. nach Prandtl, Flüssigkeitsbewegung, S. 116.
[4]) Die gestrichelte Kurve in Bild 2.

Der Startvorgang hängt dann von folgenden voneinander unabhängigen Konstanten ab: der Dichte der Flüssigkeit ϱ, der Zähigkeit der Flüssigkeit η, der Masse der Kugel M, der treibenden Kraft P, dem Kugelradius r. Aus diesen Konstanten lassen sich zwei dimensionslose Zahlen bilden: $\frac{r^3 \varrho}{M}$ und $\frac{P \varrho}{\eta^2}$.

Nun seien folgende beiden Umrechnungsgrößen definiert:

$$g = \frac{P}{\varrho\, V - M} \quad \text{und} \quad D = P\, \frac{\varrho\, V}{\varrho\, V - M},$$

worin V das Kugelvolumen bedeutet.

Wenn die treibende Kraft eine hydrostatische ist, so bedeuten diese beiden Größen das Gewicht der Masseneinheit g und das Gewicht der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit oder Deplacement D. Als voneinander unabhängige, den Startvorgang bestimmende Konstante können dann betrachtet werden:

$$\varrho,\ \eta,\ D,\ P \text{ und } g.$$

Da der Fall hydrostatischer Steigkräfte im Vordergrunde des Interesses steht, da insbesondere auch alle einschlägigen Versuche mit solchen Steigkräften ausgeführt sind, soll im folgenden diese Darstellungsweise beibehalten werden. Da beim Uebergang von dem zuerst aufgestellten System voneinander unabhängiger Konstanten zu dem zuletzt angegebenen deren Anzahl unverändert bleibt, wird durch die Aufstellung obiger Umrechnungsformeln bewiesen, daß durch die Voraussetzung hydrostatischer Treibkräfte die Allgemeinheit aller Betrachtungen keine Einbuße erleidet.

Aus den letzteren fünf Konstanten lassen sich die folgenden beiden Dimensionslosen bilden:

$$S = \frac{P}{D} \quad \text{und} \quad Q = \frac{D\, \varrho}{\eta^2}.$$

Die von der Kugel nach langer Zeit erreichte Geschwindigkeit v ergibt sich aus der Dimensionslosen $\psi = \frac{1}{\pi} \frac{P}{r^2 v^2 \varrho}$, welche eine Funktion der Reynoldsschen Zahl $R = \frac{2 r v \varrho}{\eta}$ ist. Zwischen diesen beiden sowie den oben erwähnten dimensionslosen Größen besteht die Beziehung: $R^2 \psi = \frac{\pi}{4} Q S$. Die Größe S kann als »relative Steigkraft« angesprochen werden.

Für den Fall hydrostatischer Steigkräfte ist noch zu bemerken, daß die Größe g in den beiden Dimensionslosen S und Q zwar nicht explizit vorkommt, dagegen in $D = g\, \varrho\, V$ und ebenso in P als Faktor enthalten ist. Sie geht also in die Dimensionslose Q ein, nicht aber in S.

Während die Startbewegung als Ganzes einen sehr verwickelten Vorgang darstellt, ergeben vereinfachende Annahmen verschiedener Art solche Bewegungen, welche einzelne Stadien des Startvorganges in wesentlich zutreffender Weise beschreiben. Je mehr es gelingt, die Anzahl dieser Stadien zu vermehren — sei es durch Theorien oder durch Versuchsergebnisse —, um so eingehender wird unsere Kenntnis des Startvorganges selbst, auch ohne daß derselbe durch eine einheitliche Theorie erfaßt werden kann.

Von solchen Stadien können bisher vier unterschieden werden, deren erste beiden hinlänglich bekannt sind.

Das erste stimmt in einiger Entfernung von der Kugel mit der Potentialbewegung überein. Dicht an der Kugeloberfläche entsteht eine an Dicke wachsende Grenzschicht, aus welcher sich hinter der Kugel eine zunehmende Menge »toter« Flüssigkeit ansammelt.

Das zweite Stadium beginnt mit der Ablösung. Das Totwasser wird zu einem sich langsam von der Kugel entfernenden Wirbelring. Das Strömungsbild ist noch immer rotationssymmetrisch, jedoch ist diese Symmetrie in schnell wachsendem Maße labil. Es scheint, daß gegen Ende des zweiten Stadiums die geradlinige Bewegung gegen sehr kleine Störungen noch stabil, gegenüber größeren jedoch labil ist, wobei die kritische Störungsgröße nach einem bestimmten Gesetze mit der Zeit abnehmen würde.

Mit der Zerstörung dieser labilen Rotationssymmetrie beginnt das dritte Stadium. Sein Anfang ist nicht scharf begrenzt, außerdem wird er in verschiedenen Fällen etwas früher oder später eintreten. Denn die definitive Ausweichung beginnt erst dann, wenn irgend eine zufällige Störung den mit der Zeit abnehmenden kritischen Wert erreicht. Ferner beginnt die Ausweichung zunächst nach einem exponentialen Gesetz, beginnend

mit der kleinen Störung, ist also während dieser Zeit der zufälligen Größe der Störung proportional. Der Uebergang des Exponentialgesetzes in die eigentliche Ausweichbewegung wird daher um so früher erfolgen, je größer die veranlassende kleine Störung war. Die Mittelpunktbahn ist im zweiten Stadium merklich eben, der Strömungsvorgang also noch spiegelbildlich symmetrisch. Dieses Versuchsergebnis ist dadurch zu erklären, daß sofort nach Einleitung der Ausweichung eine der nachstehend beschriebenen wellenförmigen Bewegung ähnliche herrscht, welche zwar noch nicht wie diese genau periodisch ist, aber doch deren große Stabilität aufweist. Die letztere verhindert, daß spätere kleine Störungen ähnlich große Wirkungen ausüben wie diejenige, welche das Ausweichen verursachte.

Das vierte Stadium ist die »Bewegung nach langer Zeit«. Diese ist offenbar wesentlich nicht von den Anfangsbedingungen abhängig, gilt also nicht nur für den Startvorgang, sondern für jede Bewegung einer Kugel unter der Wirkung einer konstanten Kraft. Die Bewegung nach langer Zeit kann sehr verschiedene Formen annehmen. Sie hängt, wie der Startvorgang überhaupt, von zwei dimensionslosen Größen ab, von denen mindestens eine die Reibungskonstante der Flüssigkeit enthalten muß. Abgesehen von der Stokesschen Bewegungsform gibt es eine solche, bei welcher bald größere bald kleinere Teile des hinter der Kugel befindlichen, eine Art Wirbelring bildenden Totwassers in nicht periodischer Folge abgeschwemmt werden und einen Wirbelschweif von regelloser Struktur bilden. Der Kugelmittelpunkt bewegt sich dabei merklich geradlinig und gleichförmig.

Eine hiervon ganz verschiedene Form der Bewegung nach langer Zeit ergibt als Bahn des Kugelmittelpunktes eine ebene wellenförmige Kurve um eine vertikale Achse. Diese Form kann besonders schön an im Wasser aufsteigenden Luftblasen von etwa drei Millimetern Durchmesser beobachtet werden. Die Wellenform ist auffallend regelmäßig und die Ebene, in welcher die Bewegung stattfindet, wird streng beibehalten [1]). Offenbar ist die Bewegung sehr stabil gegenüber Störungen. Ihre Regelmäßigkeit gibt Anlaß zur Vermutung, daß im Gegensatz zur geradlinigen Bewegung die wellenförmig bewegte Kugel hinter sich in der Flüssigkeit eine regelmäßig und periodisch geordnete Geschwindigkeitsverteilung zurückläßt. In dieser wie in mancher anderen Beziehung erinnert die wellenförmige Bewegung an die von Kármán untersuchten Wirbelreihen.

Nach dieser Vorstellung muß der Typus der wellenförmigen Bewegung wesentlich nur von der Dimensionslosen S abhängen, dagegen die Frage, welche Bewegungsform in einem bestimmten Fall eintritt, von einem Stabilitätskriterium, in welchem beide Dimensionslosen S und Q vorkommen müssen.

Der Kugelmittelpunkt bewegt sich nach langer Zeit auf einer vertikalen Geraden oder wellenförmig um eine solche herum. Diese Gerade geht im allgemeinen nicht durch den Ausgangspunkt der Bewegung. Bei den Göttinger Startversuchen mit Kinderballonen zeigte sie sich durchwegs in der Richtung der beginnenden seitlichen Ausweichung vom Startort weggerückt.

8. Anhang. Das Arbeiten mit dem Kinematographen. Die in der vorliegenden Arbeit besprochenen Versuche lieferten reichliche Erfahrungen über Zweckmäßigkeit kinematographischer Versuchsanordnungen hinsichtlich solcher Aufnahmen, welche einer quantitativen Analyse von Bewegungsvorgängen dienen. Die Herstellung von Positiv-Filmen kommt für diesen Zweck im allgemeinen nicht in Frage.

Die Anwendung des Kinematographen ist gegeben, wenn eine Reihe gleichzeitiger Lagen zweier oder mehrerer Punkte bestimmt werden soll. Ein Spezialfall dieser Aufgabe liegt vor, wenn eine Reihe aufeinanderfolgender Lagen eines Körpers festzustellen ist, denn jede dieser Lagen ist durch die von drei — in einfachen Fällen von zwei — Punkten bestimmt; die Bestimmung einer Reihe von Lagen eines oder mehrerer Punkte und der zugehörigen Zeiten bildet einen anderen Spezialfall, und zwar den wohl häufigsten und wichtigsten. Manchmal wird eine Versuchsanordnung ohne Kinematograph vorzuziehen sein, denn umständlich in der Handhabung, liefert dieser nur Ergebnisse von

[1]) Kleinere Blasen von etwa ein bis zwei Millimeter Durchmesser steigen selten auch schraubenförmig, noch kleinere ausnahmslos geradlinig, während bei Durchmessern über etwa $4^1/_2$ Millimetern die hydrodynamischen Druckkräfte die Oberflächenspannung überwinden und den Blasen statt Kugelform andere, zeitlich veränderliche Gestalten geben.

begrenzter Genauigkeit. Unzweckmäßig ist z. B. seine Anwendung, wenn nur die Bestimmung der Bahn eines Punktes gefordert ist[1]).

Soweit irgend möglich, wird man naturgemäß die Verwendung solcher Apparate anstreben, wie sie zu den gewöhnlichen Kinoaufnahmen benutzt werden. In jedem Falle wird man aber das handelsübliche Filmmaterial zu verwenden bestrebt sein, also auch dann, wenn ein besonderer Aufnahmeapparat gebaut wird, der dann dem känflichen Negativfilm schon bei der Konstruktion anzupassen ist. Dieses Filmmaterial hat eine Breite von 35 mm und kann ungelocht oder fertig gelocht bezogen werden. (Normal sind 208 Löcher pro Meter, doch weichen manche Fabrikate hiervon eine Kleinigkeit ab.) Die fertig käuflichen Aufnahmeapparate belichten auf einen Meter Film 52 Bilder im Formate von ungefähr 19 : 24 mm. Im gewöhnlichen Betrieb gelten 15 Bilder pro Sekunde als normal, diese Zahl läßt sich auch ohne weiteres auf 20 und etwas mehr steigern; aber eine wesentliche Erhöhung, etwa eine Verdopplung der Bildzahl, kann den Apparaten meistens nicht zugemutet werden.

Eine besondere solide Einspannung des Apparates, am besten unter Verwendung größerer Massen, dürfte das Arbeiten meist erleichtern. Hingegen darf niemals angenommen werden, daß etwa jedes Bildchen gegenüber dem Filmrand, der Lochung oder dem Bildrand gleich orientiert sei. Führt man den fertigen Film zur Betrachtung durch einen (Projektions-)Kinematographen oder den Aufnahmeapparat, so werden sich die einzelnen Bildchen immer gegenseitig verschoben zeigen. Zur Ausführung von Messungen ist es daher unerläßlich, feststehende Marken — im allgemeinen zwei — mit aufzunehmen. Soll nur die geradlinige Bewegung eines Punktes untersucht werden, so wird man mit nur einer Marke auskommen, die dann so angeordnet wird, daß sie in der verlängerten Bewegungsrichtung des Punktes liegt.

Zur Bestimmung des Maßstabes der Abbildung kann vor Beginn oder nach Beendigung des Versuches ein genau an dessen Stelle gebrachter Maßstab aufgenommen werden. Selbstverständlich ist ein neues Scharfeinstellen oder auch nur Abblenden für diese Eichungsaufnahmen unzulässig. Eines von den Bildchen, auf denen der Maßstab aufgenommen ist, kann man dann herausschneiden, nötigenfalls noch abschwächen und unmittelbar als Maßstab zum Ausmessen der einzelnen Bildchen benutzen. Noch bequemer wird die Ausmessung, wenn man den Maßstab nach dem Versuch durch nochmaliges Abkurbeln auf jedes Bildchen des Films bringt oder während des Versuches auf optischem Wege am Versuchsort ein reelles Bild des Maßstabes erzeugt und mitphotographiert. Im letzteren Falle, aber nur in diesem, wird der aufgenommene Maßstab auf allen Bildern gegen den aufgenommenen Raum gleich orientiert sein, also gleichzeitig als »feste Marke« im Sinne des oben ausgesprochenen Erfordernisses dienen können, so daß die Ortsbestimmung des bewegten Objektes nur eine Ablesung auf jedem Bildchen erfordert.

Auf diese Art ist nicht nur der Abbildungsmaßstab berücksichtigt, sondern es werden gleichzeitig auch etwaige Abbildungsfehler des Objektivs eliminiert, an das dann nicht mehr die Anforderung **fehlerfreier**, sondern lediglich diejenige **scharfer** Zeichnung innerhalb des Versuchsfeldes zu stellen ist. Die letzte der erwänten Arten, den Abbildungsmaßstab zu photographieren, nimmt allerdings die Zeichnungsfehler eines zweiten optischen Systems mit in Kauf.

Zur Ausführung der Messungen wird meist die Anwendung einer starken Lupe genügen, um herauszuholen, was überhaupt an Schärfe in der Aufnahme steckt. Mittels einer 15fach vergrößernden Lupe und eines fein gezeichneten Maßstabes kann man auf $^1/_{100}$ mm genau messen. Meßmikroskope müssen zur Ausmessung von Films erst mit einer besonderen Festklemmvorrichtung versehen werden. Ausmessen mittels Projektion auf einen Schirm von Millimeterpapier hat sich nicht bewährt.

Man arbeite bei den Aufnahmen mit so heller Beleuchtung als immer möglich. Z. B. ist es gar nicht übel, wenn die verschiedenen Marken von direkt ins Objektiv gespiegeltem Sonnenlicht gebildet werden. Viel Licht bedeutet Genauigkeit. Denn um genaue Bilder zu erhalten, soll nicht nur das »Tempo«, das heißt das Verhältnis der Belichtungsdauer zum zeitlichen Abstand zweier aufeinanderfolgender Aufnahmen möglichst

---

[1]) Als Beispiel für die Bewegungsanalyse mehrerer Punkte sei die (bei Besprechung der zweiten Versuchsreihe, S. 6 beschriebene) Anordnung zur Aufnahme einer Bewegung und der gleichzeitigen Aufnahme derselben Bewegung, aber von einem um 90 Grad verschobenen Beobachtungspunkt aus, angeführt: Die letztere geschah mittels eines großen Spiegels, so daß auf jedem Filmbildcheu die bei den gleichzeitigen Augenblicksprojektionen nebeneinander erscheinen, Bild 1 b.

mit der kleinen Störung, ist also während dieser Zeit der zufälligen Größe der Störung proportional. Der Uebergang des Exponentialgesetzes in die eigentliche Ausweichbewegung wird daher um so früher erfolgen, je größer die veranlassende kleine Störung war. Die Mittelpunktbahn ist im zweiten Stadium merklich eben, der Strömungsvorgang also noch spiegelbildlich symmetrisch. Dieses Versuchsergebnis ist dadurch zu erklären, daß sofort nach Einleitung der Ausweichung eine der nachstehend beschriebenen wellenförmigen Bewegung ähnliche herrscht, welche zwar noch nicht wie diese genau periodisch ist, aber doch deren große Stabilität aufweist. Die letztere verhindert, daß spätere kleine Störungen ähnlich große Wirkungen ausüben wie diejenige, welche das Ausweichen verursachte.

Das vierte Stadium ist die »Bewegung nach langer Zeit«. Diese ist offenbar wesentlich nicht von den Anfangsbedingungen abhängig, gilt also nicht nur für den Startvorgang, sondern für jede Bewegung einer Kugel unter der Wirkung einer konstanten Kraft. Die Bewegung nach langer Zeit kann sehr verschiedene Formen annehmen. Sie hängt, wie der Startvorgang überhaupt, von zwei dimensionslosen Größen ab, von denen mindestens eine die Reibungskonstante der Flüssigkeit enthalten muß. Abgesehen von der Stokesschen Bewegungsform gibt es eine solche, bei welcher bald größere bald kleinere Teile des hinter der Kugel befindlichen, eine Art Wirbelring bildenden Totwassers in nicht periodischer Folge abgeschwemmt werden und einen Wirbelschweif von regelloser Struktur bilden. Der Kugelmittelpunkt bewegt sich dabei merklich geradlinig und gleichförmig.

Eine hiervon ganz verschiedene Form der Bewegung nach langer Zeit ergibt als Bahn des Kugelmittelpunktes eine ebene wellenförmige Kurve um eine vertikale Achse. Diese Form kann besonders schön an im Wasser aufsteigenden Luftblasen von etwa drei Millimetern Durchmesser beobachtet werden. Die Wellenform ist auffallend regelmäßig und die Ebene, in welcher die Bewegung stattfindet, wird streng beibehalten [1]. Offenbar ist die Bewegung sehr stabil gegenüber Störungen. Ihre Regelmäßigkeit gibt Anlaß zur Vermutung, daß im Gegensatz zur geradlinigen Bewegung die wellenförmig bewegte Kugel hinter sich in der Flüssigkeit eine regelmäßig und periodisch geordnete Geschwindigkeitsverteilung zurückläßt. In dieser wie in mancher anderen Beziehung erinnert die wellenförmige Bewegung an die von Kármán untersuchten Wirbelreihen.

Nach dieser Vorstellung muß der Typus der wellenförmigen Bewegung wesentlich nur von der Dimensionslosen S abhängen, dagegen die Frage, welche Bewegungsform in einem bestimmten Fall eintritt, von einem Stabilitätskriterium, in welchem beide Dimensionslosen S und Q vorkommen müssen.

Der Kugelmittelpunkt bewegt sich nach langer Zeit auf einer vertikalen Geraden oder wellenförmig um eine solche herum. Diese Gerade geht im allgemeinen nicht durch den Ausgangspunkt der Bewegung. Bei den Göttinger Startversuchen mit Kinderballonen zeigte sie sich durchwegs in der Richtung der beginnenden seitlichen Ausweichung vom Startort weggerückt.

8. Anhang. Das Arbeiten mit dem Kinematographen. Die in der vorliegenden Arbeit besprochenen Versuche lieferten reichliche Erfahrungen über Zweckmäßigkeit kinematographischer Versuchsanordnungen hinsichtlich solcher Aufnahmen, welche einer quantitativen Analyse von Bewegungsvorgängen dienen. Die Herstellung von Positiv-Filmen kommt für diesen Zweck im allgemeinen nicht in Frage.

Die Anwendung des Kinematographen ist gegeben, wenn eine Reihe gleichzeitiger Lagen zweier oder mehrerer Punkte bestimmt werden soll. Ein Spezialfall dieser Aufgabe liegt vor, wenn eine Reihe aufeinanderfolgender Lagen eines Körpers festzustellen ist, denn jede dieser Lagen ist durch die von drei — in einfachen Fällen von zwei — Punkten bestimmt; die Bestimmung einer Reihe von Lagen eines oder mehrerer Punkte und der zugehörigen Zeiten bildet einen anderen Spezialfall, und zwar den wohl häufigsten und wichtigsten. Manchmal wird eine Versuchsanordnung ohne Kinematograph vorzuziehen sein, denn umständlich in der Handhabung, liefert dieser nur Ergebnisse von

[1] Kleinere Blasen von etwa ein bis zwei Millimeter Durchmesser steigen selten auch schraubenförmig, noch kleinere ausnahmslos geradlinig, während bei Durchmessern über etwa $4^1/_2$ Millimetern die hydrodynamischen Druckkräfte die Oberflächenspannung überwinden und den Blasen statt Kugelform andere, zeitlich veränderliche Gestalten geben.

begrenzter Genauigkeit. Unzweckmäßig ist z. B. seine Anwendung, wenn nur die Bestimmung der Bahn eines Punktes gefordert ist[1]).

Soweit irgend möglich, wird man naturgemäß die Verwendung solcher Apparate anstreben, wie sie zu den gewöhnlichen Kinoaufnahmen benutzt werden. In jedem Falle wird man aber das handelsübliche Filmmaterial zu verwenden bestrebt sein, also auch dann, wenn ein besonderer Aufnahmeapparat gebaut wird, der dann dem känflichen Negativfilm schon bei der Konstruktion anzupassen ist. Dieses Filmmaterial hat eine Breite von 35 mm und kann ungelocht oder fertig gelocht bezogen werden. (Normal sind 208 Löcher pro Meter, doch weichen manche Fabrikate hiervon eine Kleinigkeit ab.) Die fertig käuflichen Aufnahmeapparate belichten auf einen Meter Film 52 Bilder im Formate von ungefähr 19 : 24 mm. Im gewöhnlichen Betrieb gelten 15 Bilder pro Sekunde als normal, diese Zahl läßt sich auch ohne weiteres auf 20 und etwas mehr steigern; aber eine wesentliche Erhöhung, etwa eine Verdopplung der Bildzahl, kann den Apparaten meistens nicht zugemutet werden.

Eine besondere solide Einspannung des Apparates, am besten unter Verwendung größerer Massen, dürfte das Arbeiten meist erleichtern. Hingegen darf niemals angenommen werden, daß etwa jedes Bildchen gegenüber dem Filmrand, der Lochung oder dem Bildrand gleich orientiert sei. Führt man den fertigen Film zur Betrachtung durch einen (Projektions-)Kinematographen oder den Aufnahmeapparat, so werden sich die einzelnen Bildchen immer gegenseitig verschoben zeigen. Zur Ausführung von Messungen ist es daher unerläßlich, feststehende Marken — im allgemeinen zwei — mit aufzunehmen. Soll nur die geradlinige Bewegung eines Punktes untersucht werden, so wird man mit nur einer Marke auskommen, die dann so angeordnet wird, daß sie in der verlängerten Bewegungsrichtung des Punktes liegt.

Zur Bestimmung des Maßstabes der Abbildung kann vor Beginn oder nach Beendigung des Versuches ein genau an dessen Stelle gebrachter Maßstab aufgenommen werden. Selbstverständlich ist ein neues Scharfeinstellen oder auch nur Abblenden für diese Eichungsaufnahmen unzulässig. Eines von den Bildchen, auf denen der Maßstab aufgenommen ist, kann man dann herausschneiden, nötigenfalls noch abschwächen und unmittelbar als Maßstab zum Ausmessen der einzelnen Bildchen benutzen. Noch bequemer wird die Ausmessung, wenn man den Maßstab nach dem Versuch durch nochmaliges Abkurbeln auf jedes Bildchen des Films bringt oder während des Versuches auf optischem Wege am Versuchsort ein reelles Bild des Maßstabes erzeugt und mitphotographiert. Im letzteren Falle, aber nur in diesem, wird der aufgenommene Maßstab auf allen Bildern gegen den aufgenommenen Raum gleich orientiert sein, also gleichzeitig als »feste Marke« im Sinne des oben ausgesprochenen Erfordernisses dienen können, so daß die Ortsbestimmung des bewegten Objektes nur eine Ablesung auf jedem Bildchen erfordert.

Auf diese Art ist nicht nur der Abbildungsmaßstab berücksichtigt, sondern es werden gleichzeitig auch etwaige Abbildungsfehler des Objektivs eliminiert, an das dann nicht mehr die Anforderung fehlerfreier, sondern lediglich diejenige scharfer Zeichnung innerhalb des Versuchsfeldes zu stellen ist. Die letzte der erwänten Arten, den Abbildungsmaßstab zu photographieren, nimmt allerdings die Zeichnungsfehler eines zweiten optischen Systems mit in Kauf.

Zur Ausführung der Messungen wird meist die Anwendung einer starken Lupe genügen, um herauszuholen, was überhaupt an Schärfe in der Aufnahme steckt. Mittels einer 15fach vergrößernden Lupe und eines fein gezeichneten Maßstabes kann man auf $^1/_{100}$ mm genau messen. Meßmikroskope müssen zur Ausmessung von Films erst mit einer besonderen Festklemmvorrichtung versehen werden. Ausmessen mittels Projektion auf einen Schirm von Millimeterpapier hat sich nicht bewährt.

Man arbeite bei den Aufnahmen mit so heller Beleuchtung als immer möglich. Z. B. ist es gar nicht übel, wenn die verschiedenen Marken von direkt ins Objektiv gespiegeltem Sonnenlicht gebildet werden. Viel Licht bedeutet Genauigkeit. Denn um genaue Bilder zu erhalten, soll nicht nur das »Tempo«, das heißt das Verhältnis der Belichtungsdauer zum zeitlichen Abstand zweier aufeinanderfolgender Aufnahmen möglichst

[1]) Als Beispiel für die Bewegungsanalyse mehrerer Punkte sei die (bei Besprechung der zweiten Versuchsreihe, S. 6 beschriebene) Anordnung zur Aufnahme einer Bewegung und der gleichzeitigen Aufnahme derselben Bewegung, aber von einem um 90 Grad verschobenen Beobachtungspunkt aus, angeführt: Die letztere geschah mittels eines großen Spiegels, so daß auf jedem Filmbildcheu die bei den gleichzeitigen Augenblicksprojektionen nebeneinander erscheinen, Bild 1 b.

klein sein, sondern auch die Blendenöffnung. Letzteres ist bei Kinoaufnahmen viel nötiger, als bei gewöhnlichen photographischen Arbeiten. Der Film liegt nämlich niemals ganz eben, sondern wölbt sich bald mehr bald weniger nach vorn oder hinten. Hiergegen hilft kein Scharfeinstellen, sondern nur Abblenden.

Die Marken, besonders die beweglichen, sollen nicht von einer Begrenzungslinie zwischen hell und dunkel gebildet werden, sondern etwa von symmetrischen dunklen Zeigern auf hellem Hintergrunde oder umgekehrt. Ein solcher mag im Bilde ganz unscharf geraten und wird immer noch einen sehr sicher schätzbaren Schwärzungsschwerpunkt haben. Für unscharf abgebildete Marken hat sich auch die Anwendung eines Nonius vorzüglich bewährt. Die Koinzidenz zwischen den ruhenden, also scharf abgebildeten Marken des Maßstabes und den bewegten unscharf abgebildeten des Nonius — oder umgekehrt — läßt sich bequem und sicher entscheiden [1].

Die Zeit kann entweder dadurch gemessen werden, daß der Antrieb des Aufnahmeapparates so genau geregelt ist, daß ein bekannter und konstanter Zeitabstand aufeinanderfolgender Bilder gewährleistet ist; dies wird aber meist schwierig und nur mit größeren maschinellen Hilfsmitteln zu erreichen sein, auch eine große Anlaufszeit des Kinematographen vor Beginn jedes Versuches erfordern. Die andere Möglichkeit der Zeitbestimmung besteht darin, ein Objekt, dessen Bewegung bekannt ist, mit aufzunehmen. Eine einfache und zuverlässige Zeitmessuug, nur etwas unbequem auszuwerten, erhält man, indem man ein fallendes Bleigewicht mit aufnimmt. Das Objekt mit bekannter Bewegung kann ein vor einem Zifferblatt umlaufender Zeiger sein. Vorteilhafter ist es, das Zifferblatt umlaufen und den Zeiger feststehen zu lassen; damit vermeidet man die durch den Abstand des Zeigers vom Zifferblatt verursachte Parallaxe und spart gleichzeitig an Bildfläche, indem nur der dem Zeiger gegenüberstehende Teil des Zifferblattes in das Bildfeld zu ragen braucht. Für die Ausbildung der Teilstriche und des Zeigers gilt das für die Marken Gesagte; auch er wird vorteilhaft als Nonius ausgeführt [2].

Das Zeitrad kann entweder selbst einen durch Uhrwerk, Bremse oder eine andere Vorrichtung geregelten Gang haben, also eine richtige Uhr sein, oder es kann nur ein Schwungrad sein, dessen ganze Umdrehungen mittels eines Chronographen mit den Angaben einer Kontaktuhr verglichen werden. Folgende Herstellung eines solchen Rades hat sich bewährt: In die Felge eines Fahrrad-Hinterrades wurde ein kräftiges Bleirohr hineingeschlagen und dann seine Oberfläche abgedreht. An Stelle des Zahnkranzes wurde ein Schleifkontakt eingebaut, der bei jeder Umdrehung einmal Kontakt gab. Die Kugellagerwelle wurde an einem kräftigen Stativ angeschraubt, eine hundertteilige Skala zentrisch am Rade befestigt und dieses dann noch genau ausbalanziert [1]. Wichtig ist, daß die Kontaktvorrichtung am Zeitrad so ausgeführt ist, daß sie jedesmal genau in der gleichen Stellung Kontakt gibt, unbeeinflußt durch die elastische Deformationen, Oxydation oder Schmutz. Die durch den Schleifkontakt gegebenen Signale werden mit den von einer Kontaktuhr — am besten einer Pendeluhr — gegebenen mittels eines elektrischen Chronographen verglichen. Ist ein solcher ad hoc anzuschaffen, so empfiehlt sich einer mit drei oder vier Schreibhebeln, wodurch es ermöglicht wird, auch irgend welche anderen kennenswerten Zeitpunkte festzulegen, z. B. Beginn und Ende der Versuche [3].

Eine andere Anordnung des Zeitrades, welches in diesem Falle ganz klein ausgeführt wird und die Teilstriche als Löcher oder Schlitze trägt, ist dicht vor dem Film. Das Zeiträdchen wird von einer neben dem Film durch den Aufnahmeapparat geführten Welle von hinten aus angetrieben. Die Welle wird ihrerseits entweder von einer »Uhr«

---

[1] Als Beispiel für eine symmetrische Marke sei angeführt, daß bei den in der vorliegenden Arbeit besprochenen Versuchen das Bild des kugelförmigen Ballones als solche verwendet wurde, indem die Mitte zwischen seinem oberen und unteren Rand als die Höhe seines Mittelpunktes angesehen wurde.

Dabei konnte beobachtet werden, daß proportional der Geschwindigkeit des Ballones der obere Rand nach unten und der untere nach oben verschoben erschien. Der Ballon, welcher sich im Objekt dunkel von hellem Hintergrunde abhob, war also im Bilde scheinbar verkürzt.

[2] Auf Bild 1c, welches ein Stückchen Film wiedergibt, ist das Zeitrad, die Skala und der am Stativ befestigte Nonius gut zu erkennen.

Neben den aufsteigenden Ballon gestellt, hätte das Zeitrad dort die Ruhe der Luft gestört. Deshalb wurde es neben den Kinematographen gestellt, Front gegen den Ballon, während ein in der Mitte zwischen letzterem und dem Kinematographen aufgestellter Spiegel ein direkt neben dem Ballon stehendes Spiegelbild des Zeitrades erzeugte, welches aufgenommen wurde.

[3] Bei den besprochenen Versuchen wurde der Startmoment auf diese Weise bestimmt, der zur Auswertung der Chronogramme bekannt sein muß.

angetrieben oder sie trägt wieder ein Schwungrad mit Kontakt. Ein solches Zeiträdchen markiert also seine Zeichen auf dem Film durch seinen Schatten. Die Beleuchtung kann durch das Objektiv erfolgen, indem der betreffende Teil des Bildfeldes eine hell leuchtende Fläche erhält, oder direkt, in welchem Falle der hinter dem Zeiträdchen liegende Teil des Bildfensters durch eine Lichtwand von dessen übriger Fläche zu trennen ist.

Bei Beschleunigungsmessungen ist außer der Geschwindigkeit des Zeitrades unter Umständen auch dessen Beschleunigung zu berücksichtigen. Die aus diesem Anlasse anzubringende Korrektur ist der Geschwindigkeit des Versuchskörpers proportional. Sie verschwindet also bei Bewegungen, die aus dem Ruhezustand heraus erfolgen.

Zusammenfassung der Ergebnisse. Zu Beginn des Startes beträgt die relative scheinbare Masse der Kugel nach den Göttinger Versuchen $^1/_2$, übereinstimmend mit dem Rechnungsergebnis für die Potentialbewegung. Nach Ablösung eines Wirbelringes erfolgt ein merklich ebenes seitliches Ausweichen, dessen Heftigkeit diesen Vorgang als Zerstörung eines labilen Zustandes kennzeichnet. Die »Bewegung nach langer Zeit« kann in zwei verschiedenen Formen erfolgen. Luftblasen bewegen sich im Wasser in ebenen wellenförmigen Bahnen, und zwar mit großer Stabilität.

Die theoretische »scheinbare Masse« für ein Rotationsellipsoid wurde berechnet. Besondere Testversuche ergaben, daß mittels des Kinematographen Messungen von genügender Genauigkeit ausgeführt werden können, um die Berechnung von Beschleunigungen aus ihnen zu gestatten. Im Anhang sind Erfahrungen über das Arbeiten mit Kinematographen zusammengestellt. 195

Zur Bruchtheorie von A. Griffith.

Von **KARL WOLF** in Wien.[1]

Die üblichen Bruchtheorien der technischen Mechanik, wie die der größten Zugspannung, der größten Dehnung oder der größten Differenz zwischen zwei Hauptspannungen, haben alle den Nachteil, daß sie nicht aus allgemeinen physikalischen Gesichtspunkten abgeleitet, sondern nur auf Grund experimenteller Ergebnisse aufgestellt sind. Sie haben daher auch keine allgemeine Gültigkeit, sondern es entspricht in einem Falle diese, im anderen jene Annahme besser dem tatsächlichen Verhalten des Materials. Es lassen sich sogar Beispiele konstruieren, wo alle drei Theorien prinzipiell versagen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Da unmittelbar vor dem Eintreten des Bruches ein labiler Gleichgewichtszustand herrscht, so muß für diesen das allgemeine mechanische Kriterium eines solchen gelten: es muß die potentielle Energie ein Maximum sein. Eine allgemeine Theorie des Bruches wird daher wohl von diesem Satze ausgehen müssen. Da die potentielle Energie eines elastischen Körpers, die Verzerrungsenergiefunktion, eine bei Vergrößerung der Oberflächenkräfte monoton zunehmende Funktion ist, die außerdem gegenüber allen anderen statisch möglichen Spannungsverteilungen, welche die gleichen Randbedingungen befriedigen, für die wirklich eintretende ein Minimum darstellt, so muß man natürlich die bei dem Zerreißen auftretenden neuen Energieformen in Betracht ziehen. Unter diesen ist es besonders die Oberflächenenergie der sich neu bildenden Begrenzung, die Oberflächenspannung, die zu Beginn des Bruches, solange noch keine größeren Bewegungen der Teile auftreten, alle anderen weitaus überwiegt. Sie wird daher vor allem zu berücksichtigen sein.

Obwohl dieser naheliegende Gedanke schon früher geäußert wurde, gebührt doch A. Griffith das Verdienst, diese Berücksichtigung der Oberflächenspannung der sich beim Reißen neu bildenden Oberfläche tatsächlich durchgeführt, in einem Falle experimentell geprüft und bestätigt zu haben; die betreffende Abhandlung »The phenomena of rupture and flow in solids« erschien in den »Phil. Trans of the Roy. Soc.« im Jahre 1920. Allerdings ist die Ableitung der experimentell bestätigten Endformel, die Griffith dort gibt, unklar und nicht einwandfrei, auch ist ihm ein Fehler in der Berechnung der Konstanten unterlaufen. Man kann aber auf einfache Weise auch durch folgende Ueberlegung zu seinem Endresultate gelangen.

[1] Nach einem Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Leipzig am 19. September 1922.

Um die Vorstellungen zu präzisieren, wollen wir gleich ein konkretes Beispiel ins Auge fassen; die Betrachtungen lassen sich aber ohne weiteres verallgemeinern. Da es auf die Oberflächenenergie der neu entstehenden Oberfläche ankommt, so müssen wir einen solchen Fall behandeln, wo wir von vornherein sagen können, wie sich der Vorgang des Bruches im ersten Moment vollzieht. Das können wir am besten dann tun, wenn der Bruch darin besteht, daß ein im Material schon vorhandener Spalt weiter aufreißt. Es möge auch noch vorausgeschickt werden, daß die folgenden Ueberlegungen strenge nur für einen solchen Körper gelten, bei dem die Proportionalitätsgrenze mit der Bruchgrenze zusammenfällt, bei dem das Hookesche Gesetz bis zum Bruche gültig ist. Ein solches Verhalten zeigen schon bei gewöhnlicher Temperatur Metallsalze, vor allem das Steinsalz. Denken wir uns, wir hätten einen dünnen ebenen Streifen aus derartigem Material, in dem sich quer zur Längsachse ein Riß befindet; an den Enden greife eine konstante Zugspannung p an. Wenn ich diese Randspannung nun anwachsen lasse, so wird bei einem bestimmten Wert derselben offenbar der Spalt weiter aufreißen. Dieser kritische Wert von p — wir wollen ihn $\bar{p}$ nennen — sei zu berechnen.

Solange kein Reißen stattfindet, wird bei einem Anwachsen von p die Verzerrungsenergie entsprechend der Arbeitsleistung der Randspannungen vergrößert, $\delta V > 0$ sein, und zwar geht dabei, wenn jede Zwischenlage eine Gleichgewichtslage ist, die gesamte äußere Arbeit in Verzerrungsenergie über. Wenn nun der Bruch eintritt, wenn der Spalt ohne äußere Arbeitsleistung von selbst weiter aufreißt, so muß die potentielle Energie des ganzen Systems entsprechend der allgemeinen Bedingung für den labilen Gleichgewichtszustand abnehmen oder im Grenzfalle höchstens konstant bleiben, $\delta V \leq 0$ sein. Diese Aenderung der Energie, δV, setzt sich jetzt aus zwei Teilen zusammen, der Abnahme δU der Verzerrungsenergie infolge Vergrößerung des Risses und der damit verknüpften Aenderung der Spannungsverteilung und der Zunahme der Oberflächenenergie infolge des Größerwerdens der Oberfläche des Spaltes. Diese letztere ist aber, wenn $\delta \lambda$ die Längenänderung desselben an jedem Ende bedeutet und T die Oberflächenspannung pro Längeneinheit ist, gegeben durch $4\,T\,\delta\lambda$. Wir erhalten daher für den ersten Moment des Bruches die Gleichung

$$\delta V = -\delta U + 4\,T\,\delta\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Das gibt uns also die gewünschte Bedingung für das Eintreten des Bruches. Vorher kann er nicht stattfinden, da dann die mit dem Zerreißvorgang verknüpfte gesamte Energieänderung positiv und größer als die bei einer weiteren Anspannung wäre. Das ist im wesentlichen die Formel, die auch Griffith aufstellt[1].

Es kommt nun darauf an, das δU zu berechnen. Für U brauchen wir dabei nur jenen Teil der Verzerrungsenergie einsetzen, der von dem Vorhandensein des Spaltes herrührt, denn nur dieser ändert sich bei einer Vergrößerung desselben. Wir müssen demnach zu diesem Zwecke die durch den Riß hervorgerufene Spannungsverteilung kennen. Das ist bis jetzt für drei Fälle eines ebenen Spannungszustandes möglich: 1. für den von Griffith behandelten und experimentell geprüften Fall, daß wir in entsprechend großer Entfernung vom Spalt einen allseitig gleichen Zug bezw. Druck nach Art eines hydrostatischen Druckes haben, $\sigma_x = \sigma_y = p$, $\tau_{xy} = 0$ (vergl. Abb. 1), 2. für den Fall, daß dort ein einachsiger konstanter Zug oder Druck herrscht, $\sigma_x = p$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ (vergl. Abb. 2), und 3. für den Fall der reinen Biegung, daß nämlich in entsprechender Entfernung das Gradliniengesetz gilt, $\sigma_x = \frac{c}{\lambda}\,y$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, eine Normalspannung eine lineare Funktion des Abstandes von der Achse, die beiden anderen Spannungskomponenten gleich Null sind (vergl. Abb. 3). Die beiden ersten Lösungen sind in England von C. Inglis und unabhängig davon und voneinander in Deutschland von Th. Pöschl und dem Verfasser gegeben worden[2], die Lösung für den Fall der reinen Biegung ist vor kurzem von mir veröffentlicht worden[3].

[1]) Eine andere Ableitung, welche die Fehler von Griffith vermeidet, ist von A. Smekal in einer im Septemberheft 1922 der »Naturwissenschaften« erschienenen Abhandlung »Technische Festigkeit und molekulare Festigkeit« gegeben worden.

[2]) C. Inglis, Stresses in a Plate due to the Presence of Craks and Sharp Corners, Proc. Inst. Naval Archit. 1913. — Th. Pöschl, Ueber eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Außenraum der Ellipse. Math. Zeitschr. 1921. — K. Wolf, Beiträge zur ebenen El.-Theorie I. Einfluß eines elliptischen Loches bezw. Spaltes auf einen einachsigen Spannungszustand. Zeitschr. f. techn. Physik 1921.

[3]) K. Wolf, Beiträge zur ebenen El.-Theorie II. Einfluß eines elliptischen Loches bezw. Spaltes auf den Spannungszustand im Falle der reinen und der zusammengesetzten Biegung. Zeitschr. f. techn. Physik 1922.

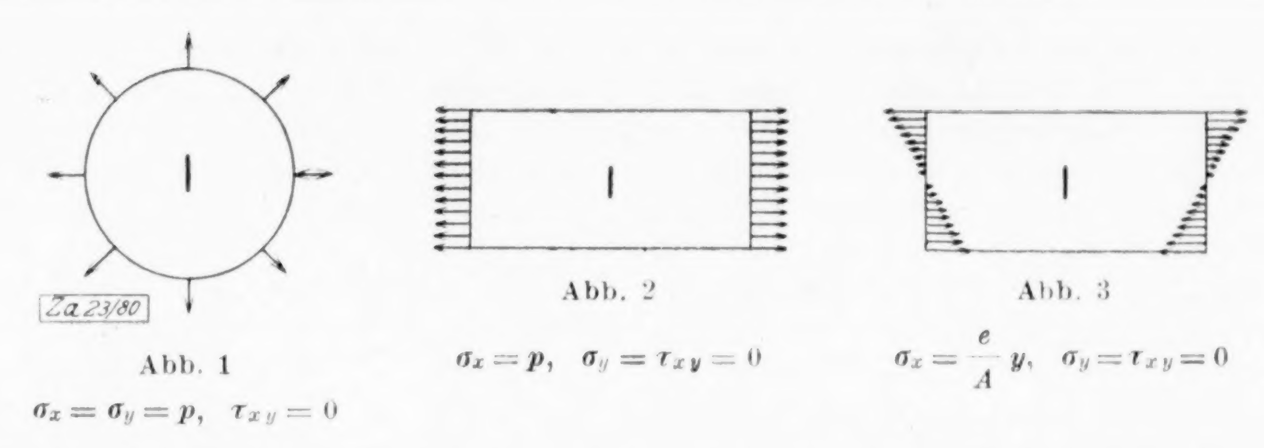


Abb. 1
$\sigma_x = \sigma_y = p, \quad \tau_{xy} = 0$

Abb. 2
$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$

Abb. 3
$\sigma_x = \frac{e}{A} y, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$

Die Berechnung von U bietet zwar keine prinzipiellen Schwierigkeiten, gestaltet sich aber besonders in dem dritten Falle recht langwierig. Sie soll daher im folgenden nur kurz skizziert werden. Die Lösungen ergeben sich als Grenzfälle der unter Annahme eines elliptischen Loches unter entsprechenden Bedingungen im Unendlichen gefundenen Spannungsverteilungen, und es ist von Vorteil, daß man schon vor der zur Bestimmung der Verzerrungsenergie erforderlichen Integration zu dem Grenzfall des Spaltes übergehen kann, wenn auch eine der Spannungskomponenten an den Enden des Risses unendlich wird. Benutzt man ebene elliptische Koordinaten $u\ v$ entsprechend der konformen Abbildung $x + i y = \cos (u + i v)$, so haben die Spannungskomponenten im ersten Falle die Form

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= p\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2v\,(\mathfrak{Cos}\,2v - 2\cos 2u + 1)}{(\mathfrak{Cos}\,2v - \cos 2u)^2}, \qquad \sigma_v = p\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2v\,(\mathfrak{Cos}\,2v - 1)}{(\mathfrak{Cos}\,2v - \cos 2u)^2} \\ \tau_{uv} &= p\,\frac{\sin 2u\,(\mathfrak{Cos}\,2v - 1)}{(\mathfrak{Cos}\,2v - \cos 2u)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

σ_u, σ_v und τ_{uv} haben die übliche Bedeutung, die anderen drei Spannungskomponenten verschwinden, da wir in allen drei Fällen nur einen ebenen Spannungszustand betrachten. Die halbe Länge des Spaltes ist dabei als Längeneinheit angenommen worden.

Die Verzerrungsenergie ist dann allgemein gegeben durch

$$U' = \frac{1}{2E}\int\left\{(\sigma_u + \sigma_v)^2 + (1 + \sigma)\,(\tau_{uv}^{\,2} - \sigma_u\,\sigma_v)\right\} d\,F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wo E der Elastizitätsmodul und σ die Poissonsche Zahl Materialkonstanten sind und $\sigma_u + \sigma_v$ bezw. $\tau_{uv}^{\,2} - \sigma_u\,\sigma_v$ gegenüber einer rechtwinkligen Koordinatentransformation invariante Ausdrücke bedeuten. Da die Differenz zwischen der Verzerrungsenergie im ungestörten Zustande, ohne Riß, U^* und der im gestörten, U', in allen drei behandelten Fällen unabhängig von der Größe des Integrationsbereiches ist, sofern nur derselbe die Störungszone vollständig einschließt, so kann man bei Aenderung der Länge des Spaltes diesen Bereich so vergrößern, daß relativ zum Spalt dieselben Verhältnisse herrschen. Es kommt daher die Längenänderung des Spaltes auf dasselbe wie eine Aenderung des Längenmaßstabes heraus, die Verzerrungsenergien U^* und U' nehmen daher proportional der Fläche des Bereiches zu, die Abhängigkeit der Differenz U derselben von λ ist also eine quadratische (die Verzerrungsenergie U' für einen konstanten Bereich ist dagegen keine quadratische Funktion von λ). Dasselbe gilt von der Abhängigkeit von der Randspannung p bezw. im dritten Beispiel von c, der Spannung in dem Abstand λ von der Achse in entsprechender Entfernung vom Riß, da diese Größen nur als Faktoren in den Ausdrücken σ_u, σ_v und τ_{uv} auftreten. Daher können wir die Ausdrücke von U in folgender Form ansetzen:

$$U_1 = \alpha_1\,\lambda^2\,p^2 \quad U_2 = \alpha_2\,\lambda^2\,p^2 \quad U_3 = \alpha_3\,\lambda^2\,c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wo α_1, α_2, α_3 Werte sind, die nur mehr von Zahlengrößen und Materialkonstanten abhängen.

Die Tatsache der Unabhängigkeit der Spannungskomponenten von λ in diesem Sinn erlaubt uns auch, ohne weiteres ein Beispiel aufzustellen, wo die üblichen Bruchtheorien nicht anwendbar sind. Nehmen wir den Fall des auf Zug beanspruchten Streifens mit dem Riß senkrecht zur Achse. Es wird sich da sicherlich eine Spannung p von einem solchen Betrage finden lassen, daß zwar kein Weiterreißen eintritt, wenn die Länge des Spaltes unter einer gewissen Grenze bleibt, dies aber stattfindet, wenn bei gleichbleibendem p diese Grenze überschritten wird, wobei aber auch in letzterem Falle die Länge des Risses noch so klein gegen die Breite des Streifens sei, daß die von dem Riß herrührende Störung der Spannungsverteilung sich nicht bis zu den Längsseiten erstreckt.

Infolge des raschen Abklingens dieser Störung ist dazu nur erforderlich, daß die Breite des Streifens etwa fünfmal größer als die Länge des Spaltes ist. Da nun aber in beiden Fällen die Größe der auftretenden Spannungen die gleiche bleibt — es nimmt mit dem Anwachsen des Spaltes ja nur der Bereich der Störung zu, die Größe desselben ist dabei von p nicht abhängig —, so geben die Bruchtheorien, die nur auf die Spannungen und Dehnungen in einzelnen Punkten des Körpers zurückgehen, und auch die von Huber aufgestellte, die nur die spezifische Verzerrungsenergie betrachtet, über die Bedingungen des Bruches keinen Aufschluß. Der oben dargelegten Theorie ordnet sich aber dieses Beispiel ohne weiteres ein, da in beiden Fällen die ganze Verzerrungsenergie der Störung eine verschiedene ist. Aus Gleichung (1) könnte man ja den kritischen Wert von λ berechnen, wenn man jetzt dieses λ und nicht wie oben die Spannung p als die zu bestimmende Größe ansieht.

Setzen wir in (2) die Werte aus (I) ein und wählen wir als Integrationsbereich die Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{Cof}\, v$ und $\mathfrak{Sin}\, v$, so erhalten wir

$$U_1' = \frac{2\,p^2\lambda^2}{E}\int_0^v dv \int_0^{\pi/2} du\, \frac{\mathfrak{Cof}\,2v - \cos 2u}{2} \left\{ \frac{4\,\mathfrak{Sin}^2\,2v}{(\mathfrak{Cof}\,2v - \cos 2u)^2} + \frac{(1+\sigma)(\mathfrak{Cof}\,2v - 1)}{(\mathfrak{Cof}\,2v - \cos 2u)^4} \left[\sin^2 2u\,(\mathfrak{Cof}\,2v - 1) - \mathfrak{Sin}^2\,2v\,(\mathfrak{Cof}\,2v - 2\cos 2u + 1)\right]\right\}$$

und nach Ausführung der Integration nach u

$$U_1' = \frac{p^2\pi\lambda^2}{E}\int_0^v \left\{(e^{2v} - e^{-2v}) + \frac{1+\sigma}{4}\left(-e^{2v} + 9\,e^{-2v} + 8\,\frac{-4\,e^{2v} + 9 - 4\,e^{-2v} - 2\,e^{-4v} + 8\,e^{-8v}}{e^{6v} - 3\,e^{2v} + 3\,e^{-2v} - e^{-6v}}\right)\right\} dv$$

und schließlich

$$U_1' = \frac{p^2\pi\lambda^2}{E}\left\{{}^1\!/_2\,(e^{2v} + e^{-2v} - 2) + \frac{1+\sigma}{4}\left[-{}^1\!/_2\,e^{2v} - {}^1\!/_2\,e^{-2v} + 2 - \frac{4}{e^{-2v}+1} + \frac{4}{(e^{-2v}+1)^2}\right]\right\} \qquad (4).$$

Wenn wir jetzt in diesem Ausdruck die mit v unendlich werdenden Glieder weglassen, in den übrigen mit v zur Grenze unendlich gehen und dem Ganzen das negative Vorzeichen geben — dies alles kommt auf dasselbe heraus, als wenn wir von der über ein beliebig großes v genommenen Verzerrungsenergie der Spannungsverteilung im ungestörten Zustande ohne Riß die über denselben Bereich erstreckte Verzerrungsenergie bei Vorhandensein des Spaltes subtrahieren —, so bekommen wir das gewünschte Resultat[1])

$$U_1 = \frac{\sigma\,p^2\pi\lambda^2}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dies stellt also die Abnahme der Verzerrungsenergie infolge des Vorhandenseins des Risses dar.

Um die Spannungsverteilung im zweiten Falle, in dem der einachsigen konstanten Spannung in entsprechender Entfernung, zu erhalten, überlagern wir der durch (I) gegebenen Spannungsverteilung, in welcher wir nur an Stelle des Faktors p eine beliebige Konstante c_1 einsetzen, eine zweite entsprechend den Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_u &= \frac{c_2}{2\,(\mathfrak{Cof}\,2v - \cos 2u)^2}\{\sin^2 2u\,(\mathfrak{Cof}\,2v - 1) - \mathfrak{Sin}^2\,2v\,(1 - \cos 2u) \\
&\qquad + (\mathfrak{Cof}\,2v - \cos 2u)\,\mathfrak{Cof}\,2v\,(1 - \cos 2u)\} \\
\sigma_v &= \frac{c_2}{2\,(\mathfrak{Cof}\,2v - \cos 2u)^2}\{-\sin^2 2u\,(\mathfrak{Cof}\,2v - 1) + \mathfrak{Sin}^2\,2v\,(1 - \cos 2u) \\
&\qquad + (\mathfrak{Cof}\,2v - \cos 2u)\cos 2u\,(\mathfrak{Cof}\,2v - 1)\} \\
\tau_{uv} &= \frac{-c_2 \sin 2u\,\mathfrak{Sin}\,2v}{2\,(\mathfrak{Cof}\,2v - \cos 2u)}
\end{aligned}\right\} \qquad (II).$$

Setzen wir in der durch diese Summe von (I) und (II) dargestellten Spannungsverteilung $c_1 = p$, $c_2 = 0$, so erhalten wir die vorhin behandelte Lösung; setzen wir $c_1 = p$, $c_2 = -p$, so bekommen wir die für den zweiten Fall (Spalt senkrecht zur Richtung von p); setzen wir $c_1 = 0$, $c_2 = p$, so ergibt sich die Lösung für den Fall, daß die Richtung des Spaltes mit der Richtung von p zusammenfällt.

Diesen Umstand können wir benutzen, um die Berechnung von U_2 bedeutend zu vereinfachen. Die gesamte Verzerrungsenergie und daher auch der durch die Störung infolge des Risses verursachte Teil derselben wird, wenn wir (I) und (II) in (2) einsetzen, die Form haben
$$U = A_1 c_1^2 + A_2 c_1 c_2 + A_3 c_2^2,$$

[1]) Bei Griffith ist dieser Wert fehlerhaft mit $\frac{\sigma p^2 \pi \lambda^2}{2E}$ berechnet; nach erfolgter Richtigstellung findet man, daß sich die Theorie noch besser dem experimentellen Resultat anschließt.

wo A_1, A_2 und A_3 Funktionen von u, v und λ darstellen. Nun ist für $c_1 = p$, $c_2 = 0$ $U = U_1$, die Größe A_1 ist daher schon durch Gleichung (5) gegeben. Ferner ist $A_3 = 0$, da für $c_1 = 0$, $c_2 = p$, wenn der Spalt in der Richtung der Spannung p liegt, durch denselben keine Aenderung der Spannungsverteilung hervorgerufen wird, somit die Verzerrungsenergie der Störung verschwindet. Wir haben deshalb nunmehr A_2 zu berechnen. Tut man dies auf analoge Weise wie im vorigen Beispiel, so erhält man

$$U_2 = \frac{p^2 \pi \lambda^2}{4E}(1+\sigma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Die Ermittlung des Wertes von U im dritten Fall, im Fall der reinen Biegung, vollzieht sich auf ähnliche Art, jedoch ist die Rechnung bedeutend langwieriger; denn man kann keinerlei Vereinfachungen wie die eben beschriebene durchführen und die Ausdrücke für die Spannungskomponenten sind weit umfangreicher. Als Beispiel sei etwa nur der von σ_u angeschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u = {} & \frac{c}{16(\operatorname{Cof} 2v - \cos 2u)^2}\{-3\sin 2u \sin 3u(\operatorname{Cof} v - \operatorname{Cof} 3v - 2\operatorname{Sin} v + {}^2/_3 \operatorname{Sin} 3v) \\ & - \sin u \sin 2u(\operatorname{Cof} 3v - \operatorname{Cof} v - 2\operatorname{Sin} 3v + 6\operatorname{Sin} v) - \operatorname{Sin} 2v \cos 3u(2\operatorname{Cof} 3v \\ & - 2\operatorname{Cof} v - 3\operatorname{Sin} 3v + \operatorname{Sin} v) - \operatorname{Sin} 2v \cos u(-6\operatorname{Cof} 3v + 6\operatorname{Cof} v + 3\operatorname{Sin} 3v \\ & - \operatorname{Sin} v) + (\operatorname{Cof} 2v - \cos 2u)[\cos u(9\operatorname{Cof} 3v - \operatorname{Cof} v - 18\operatorname{Sin} 3v + 6\operatorname{Sin} v) \\ & + \cos 3u(-9\operatorname{Cof} 3v + \operatorname{Cof} v + 6\operatorname{Sin} 3v - 2\operatorname{Sin} v)]\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}.$$

Man bekommt als Resultat

$$U_3 = \frac{\pi c^2 \lambda^2}{E}(0{,}104 - 0{,}021\,\sigma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Bei der Berechnung ist zur Kontrolle der Umstand verwendet worden, daß die mit v unendlich werdenden Glieder dieselben sein müssen wie die bei der ungestörten Spannungsverteilung ohne Riß.

Wenn wir die so gefundenen Werte von U in die Formel (1) einsetzen, so erhalten wir als Bedingung für die kritischen Werte p bezw. c, bei denen das Weiterreißen einsetzt,

$$\lambda\,\delta\lambda\,\frac{p^2 \pi \sigma}{E} - 4\,T\delta\lambda = 0$$

und zwei analoge Gleichungen in den beiden anderen betrachteten Fällen. Da wir das $\delta\lambda$ wie eine virtuelle Verschiebung behandeln, also den Faktor von $\delta\lambda$ gleich Null setzen können, ergibt dies

$$\left.\begin{aligned} & \frac{p^2 \pi \lambda \sigma}{E} = 4\,T \\ \text{oder} \quad & p\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{4\,TE}{\sigma \pi}} = C_1 \quad \text{bezw.} \quad p\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{8\,TE}{\pi(1+\sigma)}} = C_2 \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \quad (8)$$

und im Fall der reinen Biegung

$$\bar{c}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{2\,TE}{\pi(0{,}104 - 0{,}021\,\sigma)}} = C_3.$$

Diese Beziehung ist für das erste Beispiel von Griffith experimentell an Glas geprüft worden, er hat sie sehr gut bestätigt gefunden und auch der Wert von C_1 stimmt mit dem hier berechneten bis auf 8 vH überein. Es wäre daher erwünscht, auch die beiden anderen hier abgeleiteten Formeln auf ihre Uebereinstimmung mit dem Experiment zu untersuchen.

Da C_3 bedeutend, ungefähr 1,7 mal, größer ist als C_2, so würde, wenn wir die Spannung c im Abstande der halben Spaltlänge von der Achse mit p vergleichen, im Falle des auf Biegung beanspruchten Streifens mit einem derartigen Riß das Weiterreißen erst bei einer etwa 1,7 mal so großen Spannung $\bar{c}$ eintreten, als wie bei dem auf einachsigen konstanten Zug p beanspruchten. Dies legt den Gedanken nahe, daß auch die allgemeine Verschiedenheit zwischen Zug- und Biegungsfestigkeit — letztere ist ja immer bedeutend größer als die erstere —, die man immer auf Abweichungen vom Hookeschen Gesetz zurückführt, auch, teilweise wenigstens, durch die hier entwickelten Ueberlegungen erklärt werden kann, besonders, wenn man auf die auch im homogenen Material vorkommenden mikroskopischen und submikroskopischen Risse Bezug nimmt. Wie man durch die Annahme solcher Risse und durch die daraus folgende bedeutende Spannungserhöhung an den Enden derselben den Unterschied zwischen technischer und molekularer Festigkeit, d. i. der Festigkeit der zwischenmolekularen Bindungen, erklären kann und

wie die erhaltenen Werte der Größenordnung nach vollkommen übereinstimmen, das ist ausführlich in der oben zitierten Abhandlung von A. Smekal dargelegt.

Nachtrag. Da die hier abgeleiteten Formeln auf energetischen Ueberlegungen beruhen, so spielen Zug- und Druckspannung die gleiche Rolle. Bei einem Körper, der bis zum Bruche dem Proportionalitätsgesetz folgt, einem ideal spröden Körper, dürfte dieser Umstand wohl keine Bedenken erregen, da ein solcher Körper mit einem Spalt im Innern an den Enden desselben auch dann aufreißen wird, wenn er einem Druck ausgesetzt ist. Daß dies aber bei den gewöhnlichen Materialien nicht eintritt, liegt darin, daß hier noch eine Volumsbedingung hinzukommt. Bei dem Fließen, das zunächst an den Enden des Risses vor sich geht, wird infolge der mit dem Fließvorgang verknüpften Volumsvermehrung bei Druckbeanspruchung der Riß verkleinert, schließlich ausgefüllt und damit die Ursache der Spannungserhöhung beseitigt werden. Ein wirklicher makroskopischer Bruch kann deswegen auch bei größter Spannungssteigerung bei allseitigem Druck nicht eintreten, unsere Bedingung würde nur näherungsweise die für den Beginn des Fließens maßgebende Spannung liefern.

Zum Schluß möge noch ein Weg dargelegt werden, auf dem man diese Bruchtheorie erweitern und den Zusammenhang mit den üblichen Bruchhypothesen herstellen kann. Wenn wir nicht von vornherein wissen, wie der Bruch stattfindet, so wird uns die Formel $-\delta U + \delta E = 0$ nicht viel nützen, da wir nicht das δU bestimmen können. Wir könnten nur sagen, daß $\delta E = k \delta \lambda$ sein wird, wo k eine mit der Oberflächenspannung zusammenhängende Konstante und $\delta \lambda$ die Aenderung einer linearen Dimension sein wird. Nehmen wir nun an, daß sich die zufälligen kleinen Inhomogenitäten des Materials dadurch charakterisieren lassen, daß man sich in demselben ganz regellos sehr viele kleine Risse von der Länge λ verteilt denkt — λ wäre dann eine Art Materialkonstante — und daß der Bruch durch das Weiterreißen eines derartigen Spaltes eingeleitet wird. Diese Risse sollen so klein sein, daß wir in der Umgebung eines solchen die Spannungskomponenten als konstant ansehen können, ferner sollen sich die durch die Risse hervorgerufenen Spannungserhöhungen gegenseitig nicht wesentlich beeinflussen. Dann können wir das obige Verfahren auf einen derartigen Spalt anwenden, wir haben die Spannungsstörung durch einen solchen zu ermitteln, wenn in entsprechender Entfernung von demselben $\sigma_x = \sigma_{x0}$, $\sigma_y = \sigma_{y0}$, $\tau_{xy} = \tau_0$ sind. Dazu können wir die Lösungen I und II benutzen, wir brauchen nur noch eine dritte hinzufügen, die durch die Formeln

$$\left.\begin{array}{c} \sigma_u = \dfrac{c_3 \sin 2u}{A^2}\left(A \,\mathfrak{Cof}\, 2v - \cos 2u + 1\right) \qquad \sigma_v = \dfrac{c_3 \sin 2u}{A^2}\left[\cos 2u - 1 - A\left(\mathfrak{Cof}\, 2v - 2\right)\right] \\ \tau_{uv} = \dfrac{c_3 \,\mathfrak{Sin}\, 2v}{A^2}\left[1 - \cos 2u\,(1 + A)\right] \end{array}\right\} \quad \text{(III).}$$

gegeben ist. Setzen wir

$$c_1 = \sigma_{y0}\,; \quad c_2 = \sigma_{x0} - \sigma_{y0}\,; \quad c_3 = -\tau_0,$$

so bekommen wir die gewünschte Lösung und die Bedingung für den Bruch ergibt sich zu

$$4\,\sigma\,\sigma_{y0}^{\,2} + (1 - 3\,\sigma)\left[(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})\,\sigma_{y0} + \tau_0^{\,2}\right] = \frac{8\,T E}{\pi\,\lambda}.$$

Führen wir nun die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 und den Winkel α, den die eine derselben mit der Richtung des Spaltes bildet, ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &\sigma\left[(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 \cos^2 2\alpha - 2\,(\sigma_2^{\,2} - \sigma_1^{\,2}) \cos 2\alpha\right] \\ &\qquad + (1 - 3\,\sigma)\,\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2}\left[\sigma_2 + \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\left(\cos 2\alpha - {}^1\!/_2 \sin^2 2\alpha\right)\right] = \frac{8\,T E}{\pi\,\lambda}. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist aber ein Maximum für $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, man erkennt, daß der Riß am ungünstigsten wirkt, wenn er senkrecht zur Richtung der größten Hauptspannung liegt. Dann lautet unsere Bedingung für den Bruch schließlich

$$4\,\sigma\,\sigma_2^{\,2} + (1 - 3\,\sigma)(\sigma_2 - \sigma_1)\,\sigma_2 = \frac{8\,T E}{\pi\,\lambda}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nach unseren Voraussetzungen eine Konstante ist, so wird das Material bei einem Anwachsen der Spannungen dort nachgeben, wo dieser Wert zuerst erreicht wird. Dies kommt aber auf eine Kombination der Hypothese der größten Zugspannung und der der größten Hauptspannungsdifferenz heraus. Das ist ein plausibles Resultat und deswegen scheint das angedeutete Verfahren der Beachtung wert, wenn auch dabei teilweise recht weitgehende Voraussetzungen gemacht wurden.

Wien, 9. Februar 1922. 235

Berechnung der frei gelagerten elliptischen Platte auf Biegung.

Von **B. G. GALERKIN** in Petersburg.

1. Die Biegungsgleichung in elliptischen Koordinaten. Zur Aufklärung und Lösung der Frage über die Biegung einer frei gelagerten elliptischen Platte von konstanter Dicke h verwenden wir elliptische Koordinaten ξ, η, indem wir setzen:

$$x + yi = c \cosh(\xi + \eta i), \quad \text{also} \quad x = c \cosh\xi \cos\eta, \quad y = c \sinh\xi \sin\eta.$$

Die Lage der Punkte in der xy-Ebene wird durch den Schnitt konfokaler Ellipsen und Hyperbeln bestimmt:

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2\xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2\xi} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2\eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2\eta} = 1.$$

Für $\xi =$ konst. gibt die erste Gleichung eine Ellipse, und wenn η eine Konstante ist, liefert die zweite Gleichung eine Hyperbel.

Betrachten wir eine elliptische Platte mit den Halbachsenlängen a und b und nehmen wir für die Ellipse $\xi = \alpha$ an, so haben wir:

$$a = c \cosh\alpha \quad \text{und} \quad b = c \sinh\alpha.$$

Die Differentialgleichung der gebogenen Mittelfläche der Platte in krummlinigen isothermischen Koordinaten besitzt folgende Gestalt:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} h_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left[h_1^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right)\right] = p \quad \ldots \ldots \text{(a)},$$

wobei E den Elastizitätsmodul, σ Poissons Koeffizient, p die auf die Flächeneinheit wirkende Last, die normal zu der ursprünglich ebenen Platte ist, h_1 den Differentialparameter erster Ordnung bedeutet:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2}}.$$

Im Falle der elliptischen Koordinaten haben wir:

$$h_1 = \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(b)}.$$

Setzen wir h_1 aus Gl. (b) in (a), so erhalten wir:

$$\frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \frac{1}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left[\frac{1}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right)\right] = p \quad . \ (1).$$

Bei jedem krummlinigen Koordinatensystem kann die Krümmung der Mittelfläche im Falle geringer Durchbiegung folgendermaßen bestimmt werden: Die Krümmung in der Ebene, die durch den Punkt (ξ, η) parallel zur z-Achse und ξ geht, ist allgemein gegeben durch

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{h_1^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right].$$

Die Krümmung in der Ebene, die durch den Punkt (ξ, η) parallel zur z-Achse und η geht, ebenso durch

$$\frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{h_1^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right].$$

In elliptischen isothermischen Koordinaten erhalten wir[1]):

$$\frac{1}{\varrho_1} = -h_1^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} - \frac{c^2 h_1^2}{2}\sinh 2\xi\frac{\partial w}{\partial\xi} + \frac{c^2 h_1^2}{2}\sin 2\eta\frac{\partial w}{\partial\eta}\right) \quad \ldots \ldots \text{(c)},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = -h_1^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} + \frac{c^2 h_1^2}{2}\sinh 2\xi\frac{\partial w}{\partial\xi} - \frac{c^2 h_1^2}{2}\sin 2\eta\frac{\partial w}{\partial\eta}\right) \quad \ldots \ldots \text{(d)},$$

h_1 wird aus Gl. (b) eingesetzt.

---

[1]) B. G. Galerkin: Application des coordonnés curvilignes isothermes à l'intégration d'équation d'équilibre des plaques élastiques. Bulletin de l'Académie des sciences de Russie. (Unter der Presse.)

2. Die Gleichung der Mittelfläche. Die Gleichung der Mittelfläche der gebogenen (ursprünglich ebenen) Platte, unter Wirkung gleichmäßig verteilter Belastung p, normal zur Plattenfläche, kann man ansetzen in der Form:

$$\begin{aligned} w = {} & C\,(3\cosh 2\alpha \cosh 4\alpha - 4\cosh 4\alpha \cosh 2\xi + \cosh 2\alpha \cosh 4\xi)\,(3\cosh 2\alpha \cosh 4\alpha \\ & - 4\cosh 4\alpha \cos 2\eta + \cosh 2\alpha \cos 4\eta) + A_0(\cosh 2\xi - \cosh 2\alpha)\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\eta) \\ & + A_1\,(\cosh 4\alpha \cosh 2\xi - \cosh 2\alpha \cosh 4\xi)\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\eta)\,(1 + 2\cosh 2\alpha \cos 2\eta) \\ & + \sum_{2}^{\infty} A_k \Bigg\{ \left(\frac{\cosh 2k\alpha \cosh 2(k-1)\xi}{(2k-1)\cosh 2(k-1)\alpha} - \frac{\cosh 2k\xi}{2k-1} \right) \cos 2(k-1)\eta \\ & - \left[\left(\frac{\cosh 2(k+1)\alpha}{2k+1} - \frac{\cosh 2(k-1)\alpha}{2k-1} \right) \frac{\cosh 2k\xi}{\cosh 2k\alpha} - \left(\frac{\cosh 2(k+1)\xi}{2k+1} - \frac{\cosh 2(k-1)\xi}{2k-1} \right) \right] \cos 2k\eta \\ & + \left(\frac{\cosh 2k\xi}{2k+1} - \frac{\cosh 2k\alpha \cosh 2(k+1)\xi}{(2k+1)\cosh 2(k+1)\alpha} \right) \cos 2(k+1)\eta \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad (2). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck befriedigt die Gl. (1), wenn

$$C = \frac{p c^4 (1-\sigma^2)}{128\, E h^3 \cosh^2 2\alpha \cosh 4\alpha}\,.$$

Ferner wird für $\xi = \alpha$ (Umriß) w gleich Null.

Ist die Platte frei gestützt, so ist es notwendig, daß auf dem Umfange der Ellipse die Normalspannungen gleich Null seien, daher muß man annehmen, daß

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{\sigma}{\varrho_2} = 0 \text{ für } \xi = \alpha.$$

Aus Gl. (c) und (d) erhalten wir, da bei $\xi = \alpha$ sowohl $\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0$ wie $\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - (1-\sigma)\frac{\sinh 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\eta}\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

In erster Annäherung setzen wir die Koeffizienten $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots\ldots = 0$. Die Gl. (3) bei $\xi = \alpha$ gibt:

$$\begin{aligned} 4 A_0 \cosh 2\alpha\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\eta) + (1-\sigma)\sinh 2\alpha\,[16\, C \sinh^3 2\alpha\,(3\cosh^2 2\alpha \\ - \cosh 2\alpha \cos 2\eta - 2) - 2 A_0 \sinh 2\alpha] = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir das konstante Glied gleich Null, so erhalten wir:

$$A_0\,[2\cosh^2 2\alpha - (1-\sigma)\sinh^2 2\alpha] + 8\, C\,(1-\sigma)\sinh^4 2\alpha\,(3\cosh^2 2\alpha - 2) = 0 \quad (4),$$

woraus

$$A_0 = -\frac{8(1-\sigma)(3\cosh^2 2\alpha - 2)\sinh^4 2\alpha}{2\cosh^2 2\alpha - (1-\sigma)\sinh^2 2\alpha}\, C \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Somit wird w in folgender Form dargestellt:

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{p(1-\sigma^2)c^4}{128\, E h^3 \cosh^2 2\alpha \cosh 4\alpha} [(3\cosh 2\alpha \cosh 4\alpha - 4\cosh 4\alpha \cosh 2\xi \\ & + \cosh 2\alpha \cosh 4\xi)\,(3\cosh 2\alpha \cosh 4\alpha - 4\cosh 4\alpha \cos 2\eta + \cosh 2\alpha \cos 4\eta)] \\ & - \frac{8(1-\sigma)(3\cosh^2 2\alpha - 2)\sinh^4 2\alpha}{2\cosh^2 2\alpha - (1-\sigma)\sinh^2 2\alpha} (\cosh 2\xi - \cosh 2\alpha)\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\eta) \quad \ldots \quad (5). \end{aligned}$$

Für die zweite Annäherung setzen wir in Gl. (2) $A_2 = A_3 = A_4 = \ldots\ldots = 0$. In diesem Falle geht die Gl. (3) in:

$$\begin{aligned} & 2 A_0 \cosh 2\alpha\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\eta) - 6 A_1 \cosh 4\alpha \cosh 2\alpha\,(1 + 2\cosh 2\alpha \cos 2\eta)\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\eta) \\ & - (1-\sigma)\,[8\sinh^4 2\alpha\,(3\cosh^2 2\alpha - \cosh 2\alpha \cos 2\eta - 2) - A_0 \sinh^2 2\alpha \\ & + A_1 \sinh^2 2\alpha\,(2 + \cosh 4\alpha)\,(1 + 2\cosh 2\alpha \cos 2\eta)] = 0 \end{aligned}$$

über, somit erhalten wir einen Ausdruck, der eine Konstante und Glieder mit $\cos 2\eta$ und $\cos 4\eta$ enthält. Indem wir die Konstante sowie den Koeffizienten von $\cos 2\eta$ gleich Null setzen, erhalten wir die Koeffizienten A_0 und A_1.

Für praktische Zwecke darf man sich auf die erste Annäherung beschränken und kann dann ein vollständiges Bild der Beanspruchung der Platte gewinnen.

3. Die Durchbiegung im Mittelpunkt. Im folgenden untersuchen wir die Erscheinung auf Grund der Gl. (5). Für die Durchbiegung im Mittelpunkt ($\xi = 0$ und $\eta = \frac{\pi}{2}$) erhalten wir:

$$w_0 = \frac{p\,(1-\sigma^2)\,c^4}{128\,E h^3 \cosh^2 2\alpha \cosh 4\alpha}\left[(3\cosh 2\alpha \cosh 4\alpha - 4\cosh 4\alpha + \cosh 2\alpha)\,(3\cosh 2\alpha\cosh 4\alpha\right.$$

$$\left. + 4\cosh 4\alpha + \cosh 2\alpha) - \frac{8\,(1-\sigma)\,(3\cosh^2 2\alpha - 2)\sinh^4 2\alpha}{2\cosh^2 2\alpha - (1-\sigma)\sinh^2 2\alpha}\,(1-\cosh 2\alpha)\,(\cosh 2\alpha + 1)\right]$$

$$= \frac{p\,(1-\sigma^2)\,c^4 \sinh^4 2\alpha}{32\,E h^3 \cosh^2 2\alpha \cosh 4\alpha}\left[9\cosh^2 2\alpha - 4 + \frac{2\,(1-\sigma)\,(3\cosh^2 2\alpha - 2)\sinh^2 2\alpha}{2\cosh^2 2\alpha - (1-\sigma)\sinh^2 2\alpha}\right]$$

$$= \frac{p\,(1-\sigma^2)\,c^4 \sinh^4 2\alpha}{64\,E h^3 \cosh^2 2\alpha \cosh 4\alpha}\left[9\cosh 4\alpha + 1 + \frac{2\,(1-\sigma)\,(3\cosh 4\alpha - 1)\sinh^2 2\alpha}{2\cosh^2 2\alpha - (1-\sigma)\sinh^2 2\alpha}\right] \quad . \quad . \quad (6).$$

Für eine Kreisplatte ($c = 0$ und $\alpha = \infty$) ist somit:

$$w_0 = \frac{3\,p\,(1-\sigma)\,(5+\sigma)\,b^4}{16\,E h^3},$$

wo b der Halbmesser des Kreises ist. Für einen rechteckigen Streifen, der an den langen Seiten gelagert ist, muß man $c = \infty$ und $\alpha = 0$ setzen. Da in diesem Falle $c\alpha = b$, wobei b die Halbbreite des Streifens ist, so wird:

$$w_0 = \frac{3\,p\,(1-\sigma^2)\,b^4}{2\,E h^3}.$$

Diese Resultate stimmen völlig mit den bekannten überein, die man bei unmittelbarer Untersuchung der Kreis- und rechteckigen Platten erhält.

In der Zahlentafel 1 sind die Werte der Durchbiegung des Plattenmittelpunktes angegeben, die aus Gl. (6) für verschiedene Verhältnisse der Halbachsenlängen a und b berechnet sind. Daneben sind die Werte für die frei gestützte rechteckige Platte angegeben, deren Länge $2a$ und deren Breite $2b$ ist[1]). Der Poissonsche Koeffizient σ ist gleich 0,3 angenommen.

Zahlentafel 1.

Durchbiegung des Plattenmittelpunktes.

a/b	Elliptische Platte	Rechteckige Platte	a/b	Elliptische Platte	Rechteckige Platte
1	$0{,}70\ \frac{p\,b^4}{E h^3}$	$0{,}71\ \frac{p\,b^4}{E h^3}$	2	$1{,}58\ \frac{p\,b^4}{E h^3}$	$1{,}77\ \frac{p\,b^4}{E h^3}$
1,1	0,83 »	0,85 »	3	1,88 »	2,14 »
1,2	0,96 »	0,99 »	4	2,02 »	2,24 »
1,3	1,07 »	1,12 »	5	2,10 »	2,27 »
1,4	1,17 »	1,23 »	∞	2,28 »	2,28 »
1,5	1,26 »	1,35 »			

Aus dieser Tabelle ersehen wir, daß die Durchbiegung einer frei gestützten elliptischen Platte unter gleichmäßig verteilter Last p wenig abweicht von der Durchbiegung einer rechteckigen Platte bei denselben Verhältnissen $a:b$.

Für den Kreis und das Quadrat sind die Durchbiegungen fast gleich $\left(0{,}70 \text{ u. } 0{,}71\ \frac{p\,b^4}{E h^3}\right)$, dann nimmt die Differenz der Durchbiegungen zu und bei dem Verhältnisse $a:b = 3$ ist die Durchbiegung der rechteckigen Platte 1,14 mal größer als diejenige der elliptischen Platte. Hierauf nähern sich die Werte der Durchbiegungen wieder und bei dem Verhältnisse $a:b = \infty$ erhalten wir in beiden Fällen die Durchbiegung eines unendlich langen frei gestützten Streifens mit der Breite $2b$.

4. Biegungsmoment im Plattenmittelpunkt. Jetzt gehen wir zur Ermittlung der Momente im Plattenmittelpunkte über. Die Gl. (c) und (d) geben:

$$\frac{1}{\varrho_1} = -h_1{}^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = -h_1{}^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}.$$

Das Moment der Normalspannungen um die x-Achse ist für den Mittelpunkt:

$$M_x = \frac{E h^3}{12\,(1-\sigma^2)}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{\sigma}{\varrho_2}\right)_{\xi=0,\ \eta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{E h^3}{12\,c^2\,(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \sigma\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)_{\xi=0,\ \eta=\frac{\pi}{2}}.$$

Indem wir den Wert von w aus dem Ausdruck (5) einsetzen, erhalten wir nach einigen Umformungen:

[1]) B. G. Galerkin, Rechteckige Platten, die auf dem Umfange gestützt sind (Annales de l'Institut Polytechnique de Pétrograde, vol. XXIV, 1915, russisch). Zur Berechnung der dünnen, frei gestützten Platten (Zeitschrift der Ingenieure, 1917, Nr. 2, russisch).

$$M_x = \frac{p\,c^2 \sinh^2 2\,\alpha}{48 \cosh^2 2\,\alpha \cosh 4\,\alpha} \left\{ (\cosh 2\,\alpha + 1) \left[(2 \cosh 2\,\alpha + 1)(3 \cosh 2\,\alpha - 2) + \frac{(1-\sigma)(3 \cosh^2 2\,\alpha - 2) \sinh^2 2\,\alpha}{2 \cosh^2 2\,\alpha - (1-\sigma) \sinh^2 2\,\alpha} \right] + \sigma (\cosh 2\,\alpha - 1) \left[(2 \cosh 2\,\alpha - 1)(3 \cosh 2\,\alpha + 2) + \frac{(1-\sigma)(3 \cosh^2 2\,\alpha - 2) \sinh^2 2\,\alpha}{2 \cosh^2 2\,\alpha - (1-\sigma) \sinh^2 2\,\alpha} \right] \right\} \quad . \; . \; . \; . \; (7).$$

Für die Kreisplatte ($c = 0$ und $\alpha = \infty$) wird

$$M_x = \frac{p\,b^2}{16} (3 + \sigma),$$

wobei b der Halbmesser ist.

Für den Streifen, der an seinen langen Seiten frei gestützt ist ($c = \infty$, $\alpha = 0$), erhält man:

$$M_x = \frac{p\,b^2}{2},$$

wo b die Halbbreite des Streifens ist.

Das Moment der Normalspannungen um die y-Achse wird im Mittelpunkte gleich

$$M_y = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\sigma^2)} \left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{\sigma}{\varrho_1} \right)_{\xi = 0,\; \eta = \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{p\,c^2 \sinh^2 2\,\alpha}{48 \cosh^2 2\,\alpha \cosh 4\,\alpha} \left\{ (\cosh 2\,\alpha - 1) \left[(2 \cosh 2\,\alpha - 1)(3 \cosh 2\,\alpha + 2) + \frac{(1-\sigma)(3 \cosh^2 2\,\alpha - 2) \sinh^2 2\,\alpha}{2 \cosh^2 2\,\alpha - (1-\sigma) \sinh^2 2\,\alpha} \right] + \sigma (\cosh 2\,\alpha + 1) \left[(2 \cosh 2\,\alpha + 1)(3 \cosh 2\,\alpha - 2) + \frac{(1-\sigma)(3 \cosh^2 2\,\alpha - 2) \sinh^2 2\,\alpha}{2 \cosh^2 2\,\alpha - (1-\sigma) \sinh^2 2\,\alpha} \right] \right\} \quad . \; . \; . \; . \; (8).$$

Für den Kreis erhält man

$$M_y = \frac{p\,b^2\,(3+\sigma)}{16};$$

für den an den langen Seiten frei gelagerten Streifen

$$M_y = \frac{p\,b^2\,\sigma}{2}.$$

Die Spannungen im Mittelpunkte $\left(\text{bei } z = \pm \frac{h}{2}\right)$ sind

$$X_x = \pm \frac{6\,M_y}{h^2}; \quad Y_y = \pm \frac{6\,M_x}{h^2}.$$

In der Zahlentafel 2 sind die Momente M_x und M_y für die elliptische Platte bei verschiedenen Verhältnissen $a:b$ angegeben, daneben auch diejenigen der Momente für eine rechteckige Platte mit denselben Verhältnissen $a:b$. Bei Berechnung der Momente ist σ wieder gleich 0,3 angenommen.

Zahlentafel 2.

Momente M_x und M_y im Mittelpunkte der Platte.

$\frac{a}{b}$	M_x		M_y	
	Elliptische Platte	Rechteckige Platte	Elliptische Platte	Rechteckige Platte
1	0,206 $p\,b^2$	0,192 $p\,b^2$	0,206 $p\,b^2$	0,192 $p\,b^2$
1,1	0,235 »	0,221 »	0,215 »	0,198 »
1,2	0,261 »	0,250 »	0,219 »	0,200 »
1,3	0,282 »	0,277 »	0,223 »	0,202 »
1,4	0,303 »	0,301 »	0,223 »	0,202 »
1,5	0,321 »	0,324 »	0,222 »	0,200 »
2	0,379 »	0,407 »	0,210 »	0,186 »
3	0,433 »	0,476 »	0,188 »	0,162 »
4	0,465 »	0,494 »	0,184 »	0,154 »
5	0,480 »	0,498 »	0,170 »	0,150 »
∞	0,500 »	0,500 »	0,150 »	0,150 »

Die Zahlen dieser Zahlentafel sind von großem Interesse: sie zeigen, daß bei einem und demselben Verhältnisse $a:b$, solange es 1,4 nicht überschreitet, die größere Haupt-Normalspannung Y_y, wie aus den Werten der Momente M_x folgt, im Schnitt im Mittelpunkt der elliptischen Platte größer ist als bei der rechteckigen Platte. Der kleinste Wert der Normalspannung X_x der elliptischen Platte ist, wie aus den Werten M_y folgt, größer als derjenige bei der rechteckigen Platte. Im Ganzen unterscheiden sich die Spannungen der elliptischen Platte wenig von derjenigen der rechteckigen Platte.

5. Die Scherkraft in den Scheitelpunkten. Die Scherkraft ergibt sich aus (5) zu

$$V_{\xi z} = -\frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)} h_1 \frac{\partial}{\partial \xi}\left[h_1{}^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{p c \sqrt{2} \sinh 2\xi (\cosh 2\alpha - \cos 2\eta)}{4 \cosh 2\alpha \sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Für den Kreis erhalten wir:

$$V_{\xi z} = +\frac{p\xi}{2};$$

für den Streifen, der an den langen Seiten gestützt ist:

$$V_{yz} = -\frac{p c \sqrt{2} \sinh 2\xi}{2\sqrt{1+\cosh 2\xi}} = -p c \sinh \xi = -p y.$$

Für den Mittelpunkt der Platte gibt der Ausdruck (9) $V_{\xi z} = 0$.

Für die Punkte des Randes erhält man:

$$V_{\xi z} = -\frac{pc}{4} \operatorname{tgh} 2\alpha \sqrt{2(\cosh 2\alpha - \cos 2\eta)}\,.$$

Für $\eta = \frac{\pi}{2}$ ist $V_{yz} = -\frac{p c \sinh \alpha \cosh^2 \alpha}{\cosh 2\alpha} = -\frac{p b (1 + \cosh 2\alpha)}{2 \cosh 2\alpha}$;

für $\eta = 0$ ist $V_{xz} = -\frac{pb}{2} \operatorname{tgh} 2\alpha$.

In der Zahlentafel 3 sind die Werte V_{yz} und V_{xz} für verschiedene Verhältnisse $a:b$ zusammengestellt.

Zahlentafel 3.

Scherkräfte in den Scheiteln.

a/b	V_{yz}	V_{xz}	a/b	V_{yz}	V_{xz}
1	0,50 pb	0,50 pb	2	0,80 pb	0,40 pb
1.1	0,55 »	0,50 »	3	0,90 »	0,30 »
1.2	0,59 »	0,49 »	4	0,94 »	0,24 »
1,3	0,63 »	0,48 »	5	0,96 »	0,19 »
1,4	0,66 »	0,47 »	∞	1,00 »	0 »
1,5	0,69 »	0,46 »			

Die Scherkräfte auf dem Plattenumfang unterscheiden sich bedeutend von denjenigen der rechteckigen Platte, was man voraussehen konnte, da sie sich bei der elliptischen Platte ändern, ohne den Wert Null zu überschreiten, während bei der rechteckigen Platte die Stützenscherkräfte von Null in den Ecken bis zum größten Werte in den Seitenmitten ansteigen. Bei der elliptischen Platte sind die Scherkräfte gleichmäßiger verteilt.

203

Über ebene Profilströmung mit Zirkulation.

Von **WILHELM MÜLLER** in Hannover.

In der vorliegenden Arbeit werden die mechanisch-geometrischen Eigenschaften der ebenen zyklischen Strömung um geschlossene einfache Profile, wie sie in der Flugtechnik als Querschnitte von Tragorganen vorkommen, im Anschluß besonders an die allgemeinen Untersuchungen von v. Mises[1]) zu diesem Problem, in denen u. a. der Verzerrungssatz aus der Theorie der konformen Abbildung interessante Verwendung gefunden hat, besprochen. Die mechanische Auswertung der allgemeinen Grundlagen für die Ab-

[1]) v. Mises, Zur Theorie des Tragflächenauftriebs, Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch., 1917, S. 157; ebenda 1920, S. 68 und 87.

bildungs- und Strömungsfunktion im Sinne der Funktionentheorie führt auf eine Reihe von jedem Profil zugeordneten Invarianten und schließlich zu einer Konfiguration von drei Grundachsen (und zugeordneten Grundpunkten und Kurven), die für die theoretischen Auftriebsverhältnisse bestimmend sind. Von einer Bezugnahme auf besondere Profilformen ist hier abgesehen; der Verfasser hofft aber, die Anwendung der allgemeinen Beziehungen auf praktisch wichtige Einzelfälle bald folgen lassen zu können.

1. Auftrieb und Auftriebsmoment. Um den Vorgang der zweidimensionalen (Relativ-)Strömung einer Flüssigkeit oder der Luft um einen (unendlich langen) Zylinder in erster Annäherung durch einen mathematischen Ansatz erfassen zu können, genügt es bekanntlich nach Lanchester und Kutta, der gewöhnlichen eindeutigen Potentialströmung um die Tragfläche eine Zirkulationsströmung zu überlagern, deren Geschwindigkeiten unter der Fläche nach vorne, über ihr nach hinten gerichtet sind. Denn dadurch ist der Entstehung von Ueberdrucken auf der Unterseite, deren Resultante der dynamische Auftrieb ist, in einfachster Weise Rechnung getragen [1].

Die komplexe Funktion der Strömung, deren Ableitung nach den Variablen unmittelbar die Geschwindigkeitskomponenten nach den Achsenrichtungen liefert, kann man nun für den Kreis als Grenze ohne weiteres aufstellen. Hierauf hat man den Strömungsverlauf in der Ebene ζ des Kreises auf die Ebene z des Profils C zu übertragen mit Hilfe einer abbildenden Funktion $z = F(\zeta)$ oder $\zeta = f(z)$, welche nicht nur alle Punkte der geschlossenen, sich nicht überschneidenden Kontur C in die Punkte des Kreises K, sondern auch die Außengebiete von C und K in eindeutiger Weise (singularitätenfrei) und so ineinander überführt, daß die unendlich fernen Punkte beider Ebenen einander entsprechen.

Die Funktion f muß sich allgemein durch eine Reihe der folgenden Art darstellen lassen:

$$\zeta = c_0 + n\left(z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo $c_n = a_n + i b_n$ sein möge und n als reell vorausgesetzt ist. Nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie gibt es stets eine und nur eine schlichte Abbildung von der Form

$$\zeta' = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

welche das Außengebiet einer bestimmt gegebenen geschlossenen Kurve C auf das Außengebiet eines Kreises der ζ-Ebene schlicht abbildet. Der Kreis ist durch die Kontur C eindeutig bestimmt. Durch eine Transformation $\zeta = c_0 + n\zeta'$ (Verschiebung + Aehnlichkeitstransformation) kann aber dieser Kreis in jeden andern Kreis der Ebene übergeführt werden. Ich werde den Kreis, dessen Größe und Lage durch das in der z-Ebene gegebene Profil C eindeutig bestimmt ist, den Grundkreis K_g des Profils C nennen. Ist die Koordinate seines Mittelpunktes ζ_{0_g}, der Radius R_0, und sind ζ_0 und R die entsprechenden Werte für den Kreis K, so ist

$$a_0 = \xi_0' - \frac{R}{R_g}\,\xi_{0_g} \qquad b_0 = \eta_0' - \frac{R}{R_g}\,\eta_{0_g} \qquad n = \frac{R}{R_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Man erkennt also, daß bei gegebenem Profil jedem Kreis K eine bestimmte Funktion F eindeutig zugeordnet ist. Für gewisse Spezialisierung und geometrische Konstruktionen ist es zunächst zweckmäßig, die allgemeine Form (1) der Abbildung zugrunde zu legen.

Die Stromfunktion für die kreisförmige Kontur ist nun [2])

$$W(\zeta) = V'_\infty(\zeta - \zeta_0) + \frac{V'_\infty R^2}{\zeta - \zeta_0} - i\Gamma \ln(\zeta - \zeta_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

[1]) F. W. Lanchester, Aerodynamik, deutsch von C. und A. Runge, Leipzig-Berlin 1909 bis 1911. — W. M. Kutta, Ueber eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung, Sitzungsberichte der bayerischen Akademie der Wissenschaften 1910, 2. Abhandl., S. 1 bis 58. — W. M. Kutta, Ueber ebene Zirkulationsströmungen nebst Flugtechnische Anwendungen, ebenda, 1911, S. 65 bis 125. — Joukowsky, Aerodynamique, Paris 1916, S. 123 f. — L. Prandtl, Tragflächen-Auftrieb und Widerstand in der Theorie, Sonderabdruck aus dem Jahrb. der wiss. Gesellsch. für Luftf., 5. Bd., 1920, S. 39 f. — Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, Braunschweig 1917, S. 49 f.

[2]) Vergl. z. B. Grammel, a. a. O., S. 53.

wo $V'_\infty = u'_\infty - i v'_\infty = \left.\frac{d W(\zeta)}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty}$ die Geschwindigkeit der Strömung im Unendlichen, $\overline{V}_\infty$ die zu V'_∞ konjugiert komplexe Größe $\overline{V'_\infty} = u'_\infty + i v'_\infty$, ferner Γ die Zirkulationskonstante

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi}\oint V' d\zeta$$

(das Integral um die Kreiskontur K genommen) bedeutet. Nennen wir q' den absoluten Wert der Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen, $q' = |V'_\infty|$ und β den Anströmwinkel gegen die negative ξ-Achse, so können wir die Gleichung (4) auch schreiben:

$$W(\zeta) = -q'\left\{e^{i\beta}(\zeta-\zeta_0) + e^{-i\beta}\frac{R^2}{\zeta-\zeta_0}\right\} - i\Gamma \ln(\zeta-\zeta_0) \quad \ldots \quad (4\,a).$$

Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte ζ wird dargestellt durch die erste Ableitung von W nach ζ

$$u' - iv' = \frac{dW}{d\zeta} = -q'\left\{e^{i\beta} - e^{-i\beta}\frac{R^2}{(\zeta-\zeta_0)^2}\right\} - \frac{i\Gamma}{\zeta-\zeta_0} \quad \ldots \ldots \quad (5);$$

daraus bestimmen sich die Stau- oder Spaltungspunkte der Strömung. Setzt man $\zeta - \zeta_0 = -Re^{i\varphi}$, so wird

$$i\Gamma = q'R\left(e^{i(\varphi+\beta)} - e^{-i(\varphi+\beta)}\right), \quad \Gamma = 2q'R\sin(\varphi+\beta) \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Diese Gleichung hat bei gegebenem Γ zwei Lösungen φ_1 und φ_2 zwei Punkten entsprechend, welche symmetrisch in bezug auf den auf der Zuströmungsrichtung senkrecht stehenden Durchmesser des Kreises K liegen.

Die Geschwindigkeitsfunktion der Strömung um die Kontur C wird

$$V = u - iv = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Sie hängt wesentlich ab von dem Differentialquotient

$$\frac{d\zeta}{dz} = n\left(1 - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} - \ldots\right).$$

Da $\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=\infty} = n$, so ergibt sich

$$V_\infty = V'_\infty n, \quad q = nq' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Die Geschwindigkeit im Unendlichen vergrößert sich also beim Uebergang vom Kreis zur Kurve C auf den $n$fachen Wert.

An allen Stellen, wo die Ableitung $\frac{d\zeta}{dz}$ verschwindet oder unendlich wird, ist die Konformität der Abbildung gestört. Die Zirkulation Γ dagegen erleidet durch die Transformation keine Veränderung [1]). Ihr Wert bestimmt sich nach Joukowsky in folgender Weise: man sucht denjenigen Punkt A' der Kreisperipherie, in den sich die Spitze A des Profils vermöge (1) verwandelt. Hat er das Argument $180 + \varphi$, so ist Γ durch (6) bestimmt. Da $\frac{d\zeta}{dz}$ in der Spitze unendlich wird, so wird durch diese Bestimmung der Zirkulation die Geschwindigkeit im allgemeinen endlich ausfallen, womit ein glattes Abfließen an der Hinterkante des Profils gesichert ist. An der Vorderseite dagegen kann ein Staupunkt bestehen bleiben.

Der allgemeine komplexe Ausdruck für die Geschwindigkeit wird

$$V = u - iv = \left[-q'\left\{e^{i\beta} - e^{-i\beta}\frac{R^2}{(\zeta-\zeta_0)^2}\right\} - \frac{i\Gamma}{\zeta-\zeta_0}\right] n\left(1 - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} \ldots\right) \quad (9).$$

Entwickelt man nach Potenzen von z, so kommt

$$\left.\begin{aligned} V &= n\left(-q'e^{i\beta} - \frac{i\Gamma}{nz} + \frac{q'R^2e^{-i\beta} - i\Gamma\zeta_0}{n^2z^2}\right)\left(1 - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3}\ldots\right) \\ &= -nq'e^{i\beta} - \frac{i\Gamma}{z} + \frac{\frac{1}{n}q'R^2e^{-i\beta} - \frac{i\Gamma}{n}(\zeta_0 - c_0) + nq'c_1e^{i\beta}}{z^2} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10).$$

---

[1]) Vergl. Grammel, a. a. O., S. 51.

Die höheren Potenzen in den Entwicklungen kommen für unsere Zwecke nicht mehr in Betracht. Zur Berechnung des Auftriebs und des auf den Anfangspunkt bezogenen Moments haben wir noch zu bilden

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = n^2 q'^2 e^{2i\beta} + \frac{2nq' i\Gamma e^{-i\beta}}{z} + \frac{-\Gamma^2 - 2q'^2 R^2 + 2i\Gamma q'(\zeta_0 - c_0)e^{i\beta} - 2n^2 q^2 c_1 e^{2i\beta}}{z^2} \quad (11).$$

Nach Blasius[1]) sind dann Auftrieb $\mathfrak{A}$ und Moment $\mathfrak{M}$ durch folgende komplexe Integrale bestimmt:

$$X - iY = \mathfrak{A}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{i\varrho}{2}\oint \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz, \quad \mathfrak{M} = \frac{\varrho}{2}\,\text{Realteil}\oint\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \quad (12)$$

(unter ϱ die Dichte der Volumeneinheit der Luft verstanden), die zu erstrecken sind längs geschlossener, C umschließender Kurven, z. B. längs der Peripherie großer Kreise. Nach dem Cauchyschen Residuensatz wird daher unter Benutzung von (6)

$$\mathfrak{A} = 4\pi\varrho n q'^2 R \sin(\varphi + \beta) = \frac{4\pi\varrho}{n} R q^2 \sin(\varphi + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

wo φ den Winkel zwischen $A'M$ und der reellen Achse bedeutet.

Für $\mathfrak{M}$ erhält man

$$\mathfrak{M} = -\,\mathfrak{R}\; 2i\pi\varrho\,[i\Gamma e^{i\beta} q'(\zeta_0 - c_0) - n^2 q'^2 c_1 e^{2i\beta}].$$

Setzt man nun

$$\zeta_0 = |\zeta_0|\, e^{i\chi}, \quad c_0 = |c_0|\, e^{i\gamma_0}, \quad c_1 = -\, d^2 e^{2i\gamma},$$

so erhält man mit (6)

$$\mathfrak{M} = 2\pi\varrho\frac{q^2}{n^2}[2R\sin(\varphi+\beta)\{|\zeta_0|\cos(\beta+\chi) - |c_0|\cos(\beta+\gamma_0)\} + n^2 d^2 \sin 2(b+\gamma)] \quad (14).$$

Legt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Staupunkt A' der Kreisströmung, der in die Spitze A des Profils sich transformiert, so ist zu setzen

$$|\zeta_0| = R \text{ und } \varphi = \chi,$$

also wird

$$\mathfrak{M}_{A'} = 2\pi\varrho\frac{q^2}{n^2}[R^2\sin 2(\varphi+\beta) - 2R|c_0|\sin(\varphi+\beta)\cos(\beta+\gamma_0) + d^2 n^2 \sin 2(\beta+\gamma)] \quad (15).$$

In bezug auf den Staupunkt des Grundkreises ($n = 1$, $c_0 = 0$) lautet das Moment

$$\mathfrak{M}_{A'} = 2\pi\varrho q^2 [R_0^2 \sin 2(\varphi+\beta) + d^2\sin 2(\beta+\gamma)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\text{a}).$$

Häufig verwendet man als Momentenpunkt resp. Nullpunkt den Spurpunkt A der Hinterkante des Flügels, weil es der einzige am Profil von vornherein festliegende Punkt ist; läßt man gleichzeitig den Transformationskreis durch A hindurchgehen und wählt A zum Staupunkt der Kreisströmung, der dann bei der Abbildung in sich selbst übergeführt wird, so bleibt die Gültigkeit der Formel (15) für diesen Fall bestehen.

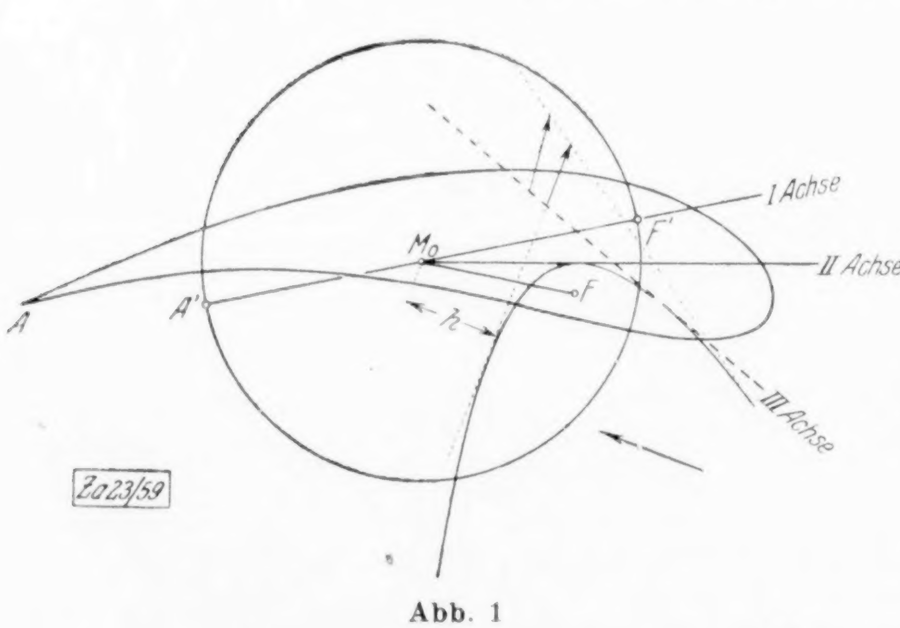


Abb. 1

Der Mittelpunkt des Grundkreises ist durch die komplexe Koordinate

$$\zeta_{0g} = \frac{\zeta_0 - c_0}{n}$$

bestimmt.

Um das Moment des Auftriebes auf diesen Punkt zu reduzieren, haben wir von $\mathfrak{M}$ folgenden Ausdruck zu subtrahieren:

$$\frac{\mathfrak{A}}{n}[|\zeta_0|\cos(\beta+\chi) - |c_0|\cos(\beta+\gamma_0)]$$

[1]) Funktionentheoretische Methoden der Hydrodynamik, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1910, S. 90f.

(Moment des nach ζ_0 verlegten Auftriebes in bezug auf den Nullpunkt); damit erhält $\mathfrak{M}$ die bereits von v. Mises[1]) gefundene einfache Form

$$\mathfrak{M}' = 2\,\pi\,\varrho\,\frac{q^2}{n^2}\,d^2 \sin 2\,(\beta+\gamma) \qquad \text{(16)}$$

und der Hebelarm des Auftriebes wird

$$h = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{A}} = \frac{d^2 \sin 2\,(\beta+\gamma)}{2\,n\,R \sin(\varphi+\beta)} \qquad \text{(16a).}$$

2. Die Misesschen Invarianten des Profils. In der bereits erwähnten Arbeit[1]) stellt v. Mises einige Betrachtungen an über die »Invarianten des Profils«. Denkt man sich das Profil auf den Grundkreis abgebildet, so sind zunächst Mittelpunkt M_0 und Radius R_0 dieses Kreises, dann aber die Richtung der Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem Bildpunkt der Profilspitze, für die Größe des Auftriebs charakteristische Bestimmungsstücke. Die letztere Gerade nennen wir mit v. Mises die »erste Achse« des Profils. Für das Moment oder die Auftriebslage kommen in Betracht: der Mittelpunkt M_0, die Richtung der »zweiten Achse«, die man erhält, wenn man die x-Achse im positiven Sinne um den Winkel γ dreht (Multiplikation der Koordinaten z mit $e^{-i\gamma}$) und die Größe des negativen absoluten Betrages von $c_1 = -d^2 e^{2i\gamma}$, resp. der Parameter d. Wenn die x-Achse in die Richtung der zweiten Achse fällt ($\gamma = 0$), so bezeichnet φ den Winkel zwischen beiden Achsen. In der zweiten Mitteilung von v. Mises[2]) wird die Gesetzmäßigkeit der Auftriebslagen noch weiter verfolgt durch Einführung des sogenannten »Brennpunktes F des Profils«. Wir tragen von dem Mittelpunkt M_0 aus die Strecke $M_0 F = \frac{d^2}{R}$ in einer Richtung auf, die gegen die x-Achse im positiven Sinne um $2\gamma - \varphi$ verdreht ist, also so, daß die 2. Achse den Winkel zwischen der 1. Achse und $M_0 F$ halbiert. Das auf F bezogene Moment erhält man dann, wenn man zu dem Moment $\mathfrak{M}'$ das Moment einer im Mittelpunkt M_0 angreifend gedachten Kraft hinzufügt. Damit kommt

$$\mathfrak{M}_F = \mathfrak{M}' - \mathfrak{A}\,\frac{d^2}{R}\cos(\beta - \varphi + 2\gamma) = -2\,\pi\,\frac{\gamma}{g}\,q^2 d^2 \sin 2\,(\varphi - \gamma) \qquad \text{(17).}$$

Zu jedem Profil gibt es also einen bestimmten Punkt, für den das Moment der Auftriebskraft vom Anstellwinkel unabhängig ist. Für den Hebelarm h hat man

$$h = \frac{\mathfrak{M}_F}{\mathfrak{A}} = -\frac{d^2 \sin 2\,(\varphi-\gamma)}{2\,R \sin(\beta+\varphi)} = -\frac{h_0}{\sin(\varphi+\beta)} \qquad \text{(17a),}$$

wo $h_0 = \frac{d^2}{2\,R}\sin(\varphi-\gamma)$ die Projektion von h auf die zur ersten Achse senkrechte Richtung darstellt. Die Fußpunkte der vom Brennpunkt F auf die Angriffslinie des Auftriebs gefällten Lote liegen auf einer Geraden, die im Abstande h parallel zur ersten Achse verläuft und $M_0 F$ halbiert. Die möglichen Lagen der Auftriebslinien hüllen also im allgemeinen eine Parabel ein, deren Brennpunkt F, deren Parameter $2\,h_0$ und deren Achse senkrecht zur ersten Achse des Profils ist. Das folgt auch sofort aus der Gleichung der Auftriebslinie. Benutzt man (17) mit $n = 1$ und bezieht die Koordinaten auf M_0 als Nullpunkt und die 2. Achse durch M_0 als x-Achse ($\gamma = 0$), so wirkt der Auftrieb in der Linie

$$x \cos\beta - y \sin\beta = -\frac{c_1 \sin 2\,\beta}{2\,R \sin(\varphi+\beta)} \qquad \text{(18).}$$

Bildet man die Ableitung nach dem Parameter β und eliminiert β, so folgt als Ort dieser Geraden die Parabel

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + 2\,\frac{c_1}{R}(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \frac{c_1^2}{R} = 0 \qquad \text{(19).}$$

(18) zeigt, daß $\mathfrak{M}' = 0$ wird für $\beta + \gamma = 0$ und $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Die Parallele zur 2. Achse und die dazu senkrechte Gerade durch M_0 sind also Tangenten der Parabel.

Wird $h_0 = 0$, so geht die Parabel über in ein Strahlenbüschel durch F. Es gibt dann einen festen Druckmittelpunkt, durch den alle Auftriebsresultierenden hindurchgehen. Die erste und zweite Achse werden parallel zueinander.

---

[1]) a. a. O. 1917, S. 157.
[2]) a. a. O. 1920, S. 68 bis 73.

Für den Mittelpunkt M_0 ergibt sich eine einfache mechanische Bedeutung, die dann wieder zu einer allgemeinen Aussage über die Lage führt. Denken wir uns das Koordinatensystem in den Mittelpunkt M_0 verschoben, setzen $\zeta = r e^{i\varphi}$ und bilden längs K_0 das Integral

$$J = \int_0^{2\pi} z(\zeta)\, d\varphi\,,$$

wo für $z(\zeta)$ die aus (2) folgende Umkehrreihe

$$z(\zeta) = \zeta - \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c'_2}{\zeta^2} + \ldots$$

zu setzen ist, so verschwindet J, da die Abbildung auf dem Rande von K_0 stetig bleibt. Längs der Profilkurve haben wir

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \frac{|dz|}{R\, d\varphi},$$

das Integral J formt sich also um in das Integral

$$\int z \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| dz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

das längs C zu erstrecken ist. Diese Gleichung sagt aber aus, daß $z = 0$ der Schwerpunkt einer Massenbelegung ist, die mit der linearen Dichte $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$ auf der Profilkurve verteilt ist, so daß also die Masse eines Bogenstückes dieser Kurve durch die Länge des Bildbogens auf K_0 gemessen wird. Infolge dieser Bedeutung ist der Mittelpunkt des Profils auch »konformer Schwerpunkt« genannt worden[1]) Es ergibt sich sofort, daß M_0 innerhalb der kleinsten konvexen Hülle der Profilkurve gelegen ist.

Aus der Theorie der konformen Abbildung ist ferner bekannt, daß der Radius R_0 des Grundkreises zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}\, l$ und l liegt, wenn $2\, l$ den größten Durchmesser des Profils bedeutet. Berücksichtigt man den Ausdruck für den Auftrieb, so ergibt sich daraus

$$\pi \sin(\varphi + \beta) \leq \frac{\mathfrak{A}}{2\,\frac{\gamma}{g}\, q^2\, l} < 2\,\pi \sin(\varphi + \beta) \quad \ldots\ldots \quad (21).$$

Je schlitzähnlicher das Profil ausfällt, desto mehr nähert sich R_0 der unteren Grenze. Alle Profile liegen ganz innerhalb des um M_0 mit $2\, R_0$ beschriebenen Kreises.

Man kann in den Formeln für den Auftrieb näherungsweise $R_0 = l/2$ gleich dem vierten Teil der Flügeltiefe setzen. Führt man dann noch die Auftriebszahl c_a durch

$$\mathfrak{A} = c_a\, \frac{\gamma}{2\, g}\, F \,.\, q^2$$

ein, wo F die Fläche des Flügels bedeutet, in unserm Falle daher $2\, l$ zu setzen ist, so ergibt sich

$$c_a = 2\,\pi \sin(\varphi + \beta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Die das Moment charakterisierende Ziffer c_m ist durch

$$c_m = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{g}\, q^2\, F\, (2\, l)} = \frac{\mathfrak{M}}{8\,\frac{\gamma}{g}\, q^2\, R_0^2} = \frac{\mathfrak{M}\, n^2}{8\,\frac{\gamma}{g}\, q^2\, R^2} \quad \ldots\ldots \quad (22\,\mathrm{a}).$$

bestimmt[2]). Nimmt man etwa den Kreisstaupunkt A' als Momentenpunkt mit den für (15) geltenden Festsetzungen, so hat man

$$c_m = \frac{1}{4}\,\pi \left[\sin 2(\varphi + \beta) - 2\,\frac{|c_0|}{R} \sin(\varphi + \beta) \cos(\beta + \gamma_0) + \frac{d^2\, n^2}{R^2} \sin 2(\beta + \gamma)\right] \quad (23).$$

Es empfiehlt sich weiter für die Druckpunktwanderung auf Grund der gefundenen Beziehungen eine anschauliche Darstellung zu geben. Nimmt man etwa die Profilecke als Bezugspunkt und läßt sie mit dem Staupunkt der Kreisströmung zusammenfallen, so

---

[1]) Ph. Frank und K. Löwner, Eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik, Zeitschrift für Mathematik 3 (1919), S. 83 f.

[2]) Vergl. etwa Ergebnisse der aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen, 1921, S. 33.

hat der Abstand σ des Schnittpunktes der Auftriebslinie mit der 2. Achse als x-Achse von A ($\gamma = \gamma_0 = 0$) nach (15) den Wert

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A} \cos \beta} = \frac{R \cos (\varphi + \beta)}{n \cos \beta} - \frac{c_0}{n} + \frac{n\, d^2 \sin \beta}{R \sin (\varphi + \beta)} \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Tragen wir β als Ordinate (nach unten die positiven Werte) und σ als Abszisse auf, so erhalten wir eine Kurve von dem in der Abbildung dargestellten Typus. Da $\beta = -\varphi$, $\sigma = \infty$ gibt, so hat die Kurve eine Asymptote parallel der x-Achse. Wir haben einen verschwindenden Auftrieb bei unendlichem Hebelarm. Das Moment ist in diesem Falle endlich.

$$\mathfrak{M}_{-\varphi} = -2\,\pi\, q^2 d^2 \sin 2\,\varphi.$$

Für $\beta = 0$ wird

$$\sigma = \frac{R \cos \varphi}{n} - \frac{c_0}{n}.$$

Abb. 2

Ist $n = 1$, so ist c_0 angenähert $= -R_0$, $\sigma \smile 2\,R_0$. Der Druckpunkt beim Anstellwinkel 0 liegt etwas vor der Mitte des Profils.

Für den Auftrieb haben wir

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{4\,\pi\, R}{n} q^2 \sin \varphi$$

und daher für kleine φ

$$\mathfrak{M}_{-\varphi} = -\frac{n\, d^2}{R} \cdot \mathfrak{A}_0 = -\frac{d^2}{R_0} \cdot \mathfrak{A}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25).$$

Das Nullmoment ist also gleich dem Moment eines Kräftepaares mit $\mathfrak{A}_0$ als Kraft und dem Brennpunktabstand $\frac{d^2}{R}$ (angenähert = dem vierten Teil der Flügeltiefe) als Hebelarm.

Der vertikalen Tangente der Kurve im positiven Bereiche der Anstellwinkel entspricht das Maximum von σ für

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d - R \sin \varphi}{R \cos \varphi}.$$

3. Weitere Abschätzungen. Andere von v. Mises ebenfalls behandelte Abschätzungen schließen sich an funktionentheoretische Ergebnisse von Bieberbach[1]) und Pick[2]) an. Danach wird der Kreis um M_0 mit $2\,R_0$ auch alle Kreise in sich enthalten, die durch konzentrische Verdoppelung eines ganz im Innern des Profils gelegenen Kreises entstehen[3]). Verdoppelt man also konzentrisch alle inneren Kreise, welche an der Ober- und Unterseite berühren, so erhält man in der Umhüllungskurve als Grenze eine neue profilartige Fläche, welche ganz innerhalb des Kreises mit $2\,R_0$ liegt. Sei r der Radius eines innerhalb des Profils liegenden Kreises und d der Abstand seines Mittelpunktes von einem Umrißpunkt, so ist

$$R_0 > \frac{1}{4} \frac{(d + r)^2}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26).$$

Der Brennpunkt F liegt innerhalb des Grundkreises, um so näher dem Kreisrande, je schmaler das Profil ist. Der Abstand von der Kreisperipherie ist $> \frac{r^2}{R}$, wenn r der

[1]) L. Bieberbach, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 38 (1916), S. 940 bis 955.

[2]) G. Pick, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Math.-Physik. Kl., Abt. IIa, 126 (1917), S. 247 bis 363.

[3]) v. Mises, a. a. O., 1920, S. 71.

Halbmesser des größten dem Profil eingezeichneten Kreises bedeutet[1]). Der absolute Betrag von c_1 in der Entwicklung

$$\zeta = z + \frac{c_1}{z} + \ldots$$

muß also immer $< R^2$ sein[2]).

Wenn man den Nullpunkt nach M_0 verlegt, so gilt für die auf das neue System umgerechneten Koeffizienten der Funktion

$$\zeta = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots,$$

welche eine schlichte Abbildung des Kreisäußeren vermittelt, nach **Bieberbach** die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{|c_n|^2}{R^{2(n+1)}} \leq 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27).$$

Schließlich möchten wir es nicht unterlassen, einige Betrachtungen zu der Geschwindigkeitsfunktion hier anzuführen. Die Geschwindigkeit in einem Punkte ζ der Kreisströmung lautet

$$u - i v = \frac{d W}{d \zeta} = -q' \left\{ e^{i\beta} - e^{-i\beta} \frac{R^2}{(\zeta - \zeta_0)^2} - 2 i R \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\zeta - \zeta_0} \right\}.$$

Mit $\zeta - \zeta_0 = r e^{i\psi}$ ergibt sich z. B. die Strömungsgeschwindigkeit längs des Umfanges aus

$$V'_\psi = \frac{d W}{r\, d \psi} = -\frac{q'}{r} \left\{ r i e^{i(\beta+\psi)} - \frac{R^2}{r} i e^{-i(\beta+\psi)} - 2 R \sin(\beta + \varphi) \right\}.$$

Der reelle Wert ergibt

$$v'_\psi = q' \left\{ \sin(\beta + \psi) \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{R}{r} \sin(\beta + \varphi) \right\} \quad \ldots \ldots (28).$$

Verlegen wir den Anfangspunkt der Koordinaten in den Staupunkt A' der Strömung, der sich in die Profilspitze transformiert, so wird $\varphi = \chi$ und wir können setzen

$$\cos \psi = \frac{\xi - |R| \cos \varphi}{R}, \quad \sin \psi = \frac{\eta - |\eta_0| \sin \varphi}{R}.$$

damit wird längs K_g

$$v'_0 = \frac{2 q'}{R} (\xi \sin \beta + \eta \cos \beta) = \frac{2 q' h}{R} \quad \ldots \ldots \ldots (28\,a),$$

wo h der Abstand des Punktes ζ von der Strömungsrichtung durch den Spaltungspunkt bedeutet.

Damit hat man ein anschauliches Bild von dem Verlauf der Umfangsströmung. Die größte Geschwindigkeit herrscht im Endpunkte des zur Zuströmungsrichtung senkrechten Durchmessers. Im übrigen ist die Geschwindigkeitsverteilung außerhalb K symmetrisch zu der Senkrechten zur Zuströmungsrichtung durch den Kreismittelpunkt.

Aus der bekannten Geschwindigkeit der Kreisströmung ergibt sich nun die Geschwindigkeit der Profilströmung durch Multiplikation mit $\frac{d\zeta}{dz}$ oder Division mit $\frac{dz}{d\zeta}$. Allgemein ergibt sich, wenn wir den Anfangspunkt im Mittelpunkt des Profils annehmen, auf Grund der **Koebe-Bieberbach**schen Verzerrungssätze[3])

$$1 - \frac{R_0^2}{|\zeta|^2} \leq \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \leq \frac{1}{1 - \left|\frac{R_0}{\zeta}\right|^2} \quad \ldots \ldots \ldots (29).$$

Für die Geschwindigkeit der Profilströmung gewinnt man daraus nach **Frank** und **Löwner**[4]) die Grenzen

$$\left(1 - \frac{R_0^2}{|\zeta|^2}\right)^2 \leq \left|\frac{V}{q}\right| \leq \frac{1 + \frac{R_0^2}{|\zeta|^2}}{1 - \frac{R_0^2}{|\zeta|^2}} \quad \ldots \ldots \ldots (30).$$

---

[1]) G. **Pick**, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Mathem.-Naturw. Klasse, Abt. IIa, 126 (1917), S. 247 bis 263.

[2]) v. **Mises**, a. a. O.,

[3]) K **Löwner**, Ueber Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Aeußeren des Einheitskreises, Mathem. Zeitschrift 3 (1919), S. 65 bis 77.

[4]) a. a. O., S. 84.

Schließlich kann man noch Schranken unabhängig von der Beziehung zum Grundkreis aufstellen, z. B.

$$\left(1-\frac{l^2}{\delta^2}\right)^2 < \frac{|V|}{q} < \frac{1+\frac{l^2}{\delta^2}}{1-\frac{l^2}{\delta^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31),$$

wo $2\,l$ wieder den größten Durchmesser des Profils und δ den Abstand des »Aufpunktes« z von dem ihm am nächsten gelegenen Profilpunkt bedeutet.

4. Schwerpunkt der Zirkulation, dritte Achse des Profils. Multipliziert man die Geschwindigkeitsfunktion mit z und integriert längs einer geschlossenen, die Unstetigkeitsstellen einschließenden Kurve, so erhält man das sogen. statische Moment der Zirkulation[1])

$$m = \oint V\,z\,d\,z = m_x + i\,m_y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

mit den Komponenten m_x und m_y.

Gilt für $V(z)$ allgemein die Entwicklung

$$V = \alpha_0 + i\,\beta_0 + \frac{\alpha_1 + i\,\beta_1}{z} + \frac{\alpha_2 + i\,\beta_2}{z^2} + \ldots,$$

so ergibt sich

$$m_x = 2\,\pi\,\beta_2, \qquad m_y = -\,2\,\pi\,\alpha_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33).$$

Der »Schwerpunkt der Zirkulation« hat dann die Koordinaten

$$x_0 = \frac{m_x}{2\,\pi\,\Gamma} \qquad y_0 = \frac{m_y}{2\,\pi\,\Gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34),$$

wo Γ, wie bekannt, durch das Integral

$$2\,\pi\,\Gamma = \oint V\,d\,z$$

definiert ist.

Legen wir nun die Entwicklung (11) zugrunde

$$V = -q\,e^{i\beta} - \frac{\Gamma\,i}{z} + \frac{q\,R^2\,e^{-i\beta} - \Gamma\,i\,\zeta_0 + q\,c_1\,e^{i\beta}}{z^2}$$

mit $n = 1$, so ergibt sich, wenn wir den Radius des Grundkreises R statt R_0 nennen,

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \xi_0 + \frac{R^2\sin\beta + d^2\sin(\beta + 2\,\gamma)}{2\,R\sin(\varphi+\beta)}, \qquad y_0 = \eta_0 + \frac{R^2\cos\beta - d^2\cos(\beta + 2\,\gamma)}{2\,R\sin(\varphi+\beta)} \\ \text{oder}\quad z_0 &= \zeta_0 + \frac{R\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} - \frac{c_1}{R}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}}{2\sin(\varphi+\beta)} \end{aligned}\right\} \quad (35).$$

Der Schwerpunkt der Zirkulation, er möge S heißen, ist also ein mit dem Anstellwinkel β der Strömung veränderlicher Punkt. Zu jeder Auftriebslage gehört eine bestimmte Lage von S. Verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten nach M_0 und dreht das Achsenkreuz im positiven Sinne um den Winkel γ, so daß also die x-Achse mit der 2. Achse koinzidiert, so kann man die Koordinaten von S in der Form schreiben

$$x_0 = \frac{\left(R - \frac{c_1}{R}\right)\sin\beta}{2\sin(\varphi+\beta)} \qquad y_0 = \frac{\left(R + \frac{c_1}{R}\right)\cos\beta}{2\sin(\varphi+\beta)} \quad \ldots \ldots \quad (36).$$

Bezeichnet man die Größe $-\frac{c_1}{R}$, also den Abstand des konformen Schwerpunktes M_0 vom Brennpunkt F mit f, so kommt

$$x_0 = \frac{(R+f)\sin\beta}{2\sin(\varphi+\beta)} \qquad y_0 = \frac{(R-f)\cos\beta}{2\sin(\varphi+\beta)} \quad \ldots \ldots \quad (36\,\mathbf{a}).$$

Nun ist die Gleichung der Auftriebslinie auf Grund von (19)

$$x\cos\beta - y\sin\beta - \frac{f\sin 2\,\beta}{2\sin(\varphi+\beta)} = 0.$$

[1]) Vergl. O. Grammel, a. a. O. S. 15.

Da diese Gleichung von den Werten (36) erfüllt wird, so sieht man, daß die Auftriebslinie durch den entsprechenden Schwerpunkt S der Zirkulation hindurchgeht.

Eliminiert man ferner den Winkel β aus den Gleichungen (36), so ergibt sich

$$2\,x_0 \cos\varphi\,(R-f) + 2\,y_0 \sin\varphi\,(R+f) = R^2 - f^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

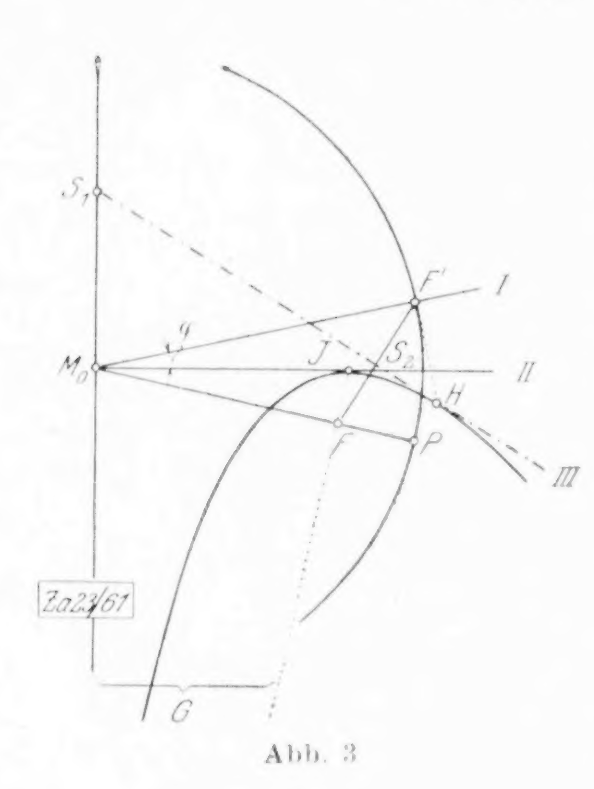


Abb. 3

Der Schwerpunkt S bewegt sich also auf einer geraden Linie, während die Auftriebslinie die Parabel mit F als Brennpunkt und der 1. Achse als Leitlinie umhüllt. Ich werde diese für das Profil charakteristische Linie die dritte Achse des Profils oder die Achse s nennen. Vermutlich spielt sie für den Strömungsvorgang sowie für die Stabilitätsverhältnisse eine wesentliche Rolle. Diese dritte Achse schneidet die zweite Achse durch M_0 im Abstande

$$M_0\,S_2 = \frac{R+f}{2\cos\varphi},$$

die Senkrechte zur zweiten Achse durch M_0 im Abstande

$$M_0\,S_1 = \frac{R-f}{2\sin\varphi}.$$

Man sieht, daß sich der Punkt S von S_1 nach S_2 bewegt, während der Anstellwinkel von 0^0 bis 90^0 wächst. Für $\beta = -\varphi$ (Auftriebsgröße 0) rückt Punkt S ins Unendliche in der Richtung von S_2 nach S_1.

Um die Bewegung von S auf der Achse genauer zu verfolgen, bilden wir $ds^2 = dx_0{}^2 + dy_0{}^2$. Man erhält

$$ds^2 = \frac{R^2 + f^2 - 2\,Rf\cos 2\,\varphi}{4\sin^4(\varphi+\beta)}\,d\beta^2.$$

Der Zähler ist das Quadrat der Entfernung $FF' = e$. Es wird also

$$ds = \frac{e}{2\sin^2(\varphi+\beta)}\,d\beta\,, \qquad s = -\frac{e}{2}\,\mathrm{ctg}\,(\varphi+\beta).$$

Man sieht daraus, daß der Punkt S, wenn man mit kleinen negativen Werten von β beginnt (φ ist im allgemeinen spitz, etwa 10 bis 20^0), anfangs schnell, mit zunehmendem β langsamer sich bewegt. Nimmt man $\varphi = 20^0$, so bleibt bei einer praktischen oberen Grenze von 15^0 für β der Wert von s, von S_1 an gerechnet, etwa unterhalb $0{,}66\,e$. Allgemein ist der Abstand eines Punktes von S_1

$$s = \frac{e}{2}\left(\mathrm{ctg}\,\varphi - \mathrm{ctg}\,(\varphi+\beta)\right).$$

Der Abstand des Punktes $S_1\,S_2$ ist

$$\overline{S_1\,S_2} = \frac{e}{2}\,(\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{ctg}\,\varphi) = \frac{e}{\sin 2\,\varphi}.$$

Ist die Auftriebsrichtung parallel zur ersten Achse, also $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, so sind die Koordinaten von S

$$x_0 = \frac{1}{2}\,(R+f)\cos\varphi\,, \qquad y_0 = \frac{1}{2}\,(R-f)\sin\varphi\,.$$

Das sind aber gleichzeitig die Koordinaten der Mitte von FF'. Vergleicht man die Richtungen beider Geraden, so ergibt sich, daß die dritte Achse nichts anderes ist als die Mittelsenkrechte zur Verbindung des Brennpunktes mit dem Schnitt der ersten Achse durch M_0 mit dem Grundkreise.

Hieraus folgt aber dann weiter, daß der Mittelpunkt von FF' oder der Fußpunkt des Lotes von F auf die dritte Achse auf der Scheiteltangente der Auftriebsparabel liegt oder daß die dritte Achse selbst eine (ausgezeichnete) Tangente der Parabel ist. Man stellt das auch ohne weiteres fest, wenn man die Gleichung (18) mit (37) vergleicht.

Setzt man in der Gleichung der Auftriebsparabel

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + f^2 - 2\,f\,(x\cos\varphi - y\sin\varphi) = 0$$

einmal $y = 0$, das andere Mal $x = 0$, so ergibt sich, daß das Lot auf $M_0 F$ in F die Parabel in den Berührungspunkten J und G mit der zweiten Achse durch M_0 und dem Lote durch M_0 zu dieser Achse schneidet.

Der Berührungspunkt H der dritten Achse mit der Parabel ist der Schnittpunkt des Lotes in F' auf der ersten Achse mit der dritten Achse.

5. Die drei Grundkurven eines Profils. Denkt man sich von den Punkten S der dritten Achse in den Auftriebsrichtungen, also in den Richtungen der übrigen Tangenten die reziproken Werte der Auftriebszahlen, die wir $= \frac{1}{CR \sin(\varphi + \beta)}$ setzen können, abgetragen, so liegen die Endpunkte mit den Koordinaten

$$x = \frac{\sin\beta}{\sin(\varphi+\beta)}\left[\frac{R+f}{2} + \frac{1}{CR}\right], \qquad y = \frac{\cos\beta}{\sin(\varphi+\beta)}\left[\frac{R-f}{2} + \frac{1}{CR}\right] \quad . \quad . \quad (38),$$

wie man sich leicht überzeugt, wieder auf einer Geraden, und zwar einer Tangente der Auftriebsparabel mit der Gleichung

$$x \cos\varphi\left[\frac{R-f}{2} + \frac{1}{CR}\right] + y \sin\varphi\left[\frac{R+f}{2} + \frac{1}{CR}\right] = \frac{R^2-f^2}{4} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C^2 R^2} \quad . \quad (39).$$

Wenn man diese mit der Gleichung der Auftriebslinie vergleicht, so ergibt sich für den zugehörigen Wert von $\beta = \beta'$

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{R+f+\frac{2}{CR}}{R-f+\frac{2}{CR}} \operatorname{tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Da, wenn die beiden Parameter $M_0 F = f$ und φ (Richtungsunterschied der beiden ersten Achsen) fest bleiben und der Radius R des Grundkreises wechselt, die dritte Achse die Auftriebsparabel beschreibt, so können wir von jeder Tangente der Parabel ausgehen und den leicht verständlichen Satz aussprechen: Die Abschnitte auf den Tangenten (β) der Parabel als Auftriebslinien, welche von zwei festen Tangenten begrenzt werden, sind den reziproken Auftriebswerten proportional, oder: jeder Tangente ordnet sich eine andere Tangente zu, die mit der ersteren auf den andern Tangenten solche Abschnitte begrenzt, welche die in einem bestimmten Maßstabe gemessenen reziproken Auftriebsgrößen darstellen.

Da die Auftriebsparabel nur von f und φ abhängt, können wir sie abgekürzt $\mathfrak{P}_{f,\varphi}$ nennen. Wenn R und φ fest bleiben und f sich verändert, so beschreibt die dritte Achse eine zur Auftriebsparabel »reziproke« Parabel $\mathfrak{P}_{R,\varphi}$ mit der Gleichung

$$(x \cos\varphi - y \sin\varphi)^2 - 2R(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + R^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (41),$$

die also aus $\mathfrak{P}_{f,\varphi}$ hervorgeht durch Ersetzung von f durch R und von φ durch $-\varphi$. Sie hat den Punkt F' zum Brennpunkt und die Gerade MF zur Leitlinie. Wenn endlich R und f fest bleiben und der Winkel φ sich verändert, so beschreibt die Achse s die Ellipse $\mathfrak{E}_{R,f}$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R+f}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R-f}{2}\right)^2} = 1 \quad . \quad . \quad (42).$$

Es ist bemerkenswert, daß das Quadrat der Exzentrizität dieser Ellipse $= Rf$ ist, also unmittelbar den Koeffizienten c_1 der auf die zweite Achse bezogenen Abbildungsfunktion angibt.

Die drei Kurven $\mathfrak{P}_{f,\varphi}$, $\mathfrak{P}_{R,\varphi}$, $\mathfrak{E}_{R,f}$ haben die zum System R, f, φ gehörende Achse s zur gemeinsamen Tangente (vergl. Abb. 4). Außerdem sieht man auf Grund der oben besprochenen Beziehungen, daß die beiden Parabeln $\mathfrak{P}$ die zweite Achse und deren Senkrechte durch M_0 als gemeinsame Tangenten haben und daß die Berührungspunkte G, J, H' mit F auf einer der Achse von $\mathfrak{P}_{R,\varphi}$ parallelen Geraden, ebenso G' J' H mit F' auf einer der Achse von $\mathfrak{P}_{f,\varphi}$ parallelen Geraden liegen, ferner der Berührnngspunkt E der Ellipse $\mathfrak{E}_{R,f}$ in den Mittelpunkt der

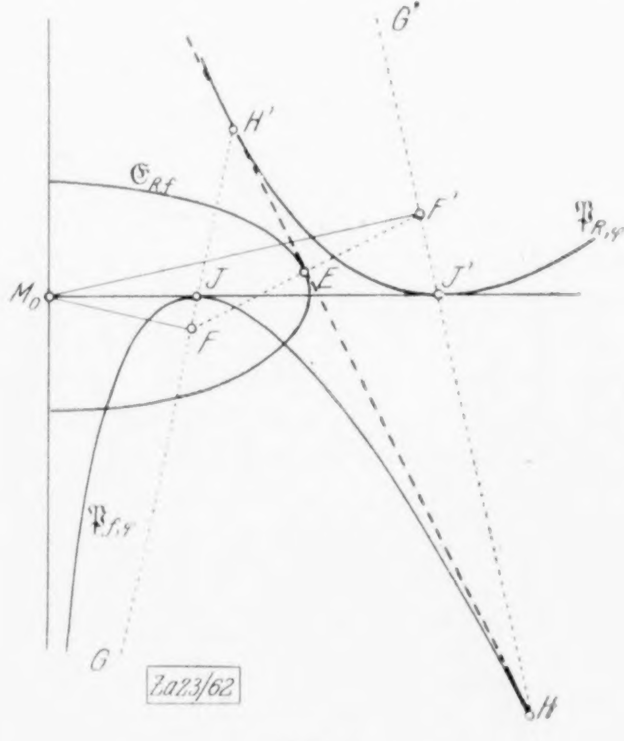


Abb. 4

Strecke FF' fällt (die Punkte auf $\mathfrak{P}_{R,\varphi}$ sind durch Striche von den entsprechenden auf $\mathfrak{P}_{R,f}$ unterschieden).

Während s die Ellipse $\mathfrak{E}_{R,f}$ beschreibt (φ variabel), beschreibt der Berührungspunkt H von s mit $\mathfrak{P}_{f,\varphi}$ eine rationale Kurve vierter Ordnung

$$(R-f)^4 x^2 + (R+f)^4 y^2 = 16 f^2 x^2 y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

mit einem imaginären und zwei Doppelpunkten im Unendlichen (Kreuzkurve). Entsprechendes gilt fürden Punkt H'.

In dem bereits erwähnten Fall, daß die erste und zweite Achse zusammenfallen resp. parallel sind, werden die Parabeln $\mathfrak{P}$ als Tangentenkurven zwei Strahlenbüschel durch F und F', und die Achse s steht senkrecht auf MFF' und geht durch die Mitte von FF'.

Schlußbemerkung. Die weitere Aufgabe würde sein, die Mannigfaltigkeit derjenigen Profilformen zu bestimmen, welche durch ihre drei Achsen und den Mittelpunkt M_0 gegeben sind. Für die ersten beiden Achsen kommt es dabei nur auf die Richtung an, die wir daher als durch den Profilmittelpunkt M_0 gehende Geraden uns gegeben denken. Die Achse s dagegen, als der Ort der gedachten Angriffspunkte der Auftriebskräfte, sei ihrer absoluten Lage nach festgelegt. Es ergibt sich sofort, daß alle Profilformen mit derselben Lage der drei Achsen in bezug auf den Mittelpunkt dieselben Auftriebseigenschaften haben, d. h. bei gegebener Geschwindigkeit der Strömung des umgebenden, reibungslos gedachten Mediums in der Größe des Auftriebs und der Art der Druckpunktswanderung übereinstimmen.

Denn um die Größen R und f zu finden, die den Auftrieb bestimmen ($c_1 = -Rf$), zeichnet man zunächst die Richtung nach dem Brennpunkt F spiegelbildlich zur ersten Achse in bezug auf die zweite Achse. Spiegelt man ferner die erste Achse an der dritten Achse, so erhält man sofort F als Schnittpunkt beider Geraden. Das Lot von F auf die dritte Achse liefert dann sofort (als Spiegelpunkt von F in bezug auf s) den Punkt F' des Kreises K_g und damit dessen Radius.

Die Auftriebsparabel kann aus der ersten Achse als Leitlinie und der zweiten und dritten Achse als Tangenten konstruiert werden. Wie man aus der gegebenen Achsenkonfiguration die zugeordneten Profilformen nach systematischen Gesichtspunkten konstruieren und damit die Beziehung der Auftriebseigenschaften zur besonderen Formgebung ermitteln kann, soll im Anschluß an die wertvollen Vorarbeiten von v. Mises an andrer Stelle gezeigt werden. 231 a

Zeichnerische Ermittlung der Beschleunigung bei zwangläufigen Getrieben.

Von **TH. PÖSCHL** in Prag.

Trotz der großen Zahl von Arbeiten, die sich mit der Bestimmung des Beschleunigungszustandes von zwangläufigen Getrieben befassen [1]), besitzen die meisten der bekannten Konstruktionen anscheinend doch nicht jenen Grad von Einfachheit, den ihre Einbürgerung in der technischen Praxis fordern würde. Die besonderen Hilfsmittel aus der geometrischen Bewegungslehre und Kinematik, die dabei zur Anwendung kommen, sind hierzu nicht bequem genug. In meinem soeben erschienenen »Lehrbuch der technischen Mechanik« (Berlin, Julius Springer, 1923) habe ich versucht, diesen Konstruktionen eine möglichst einfache Form zu geben, und da die Ergebnisse auch für weitere Kreise Interesse haben dürften, möchte ich hier ihre Grundlagen kurz wiedergeben und deren Anwendung auf die unrunde Steuerscheibe und die einfache Wälzhebelsteuerung ausführen. Die Anwendung auf andere Fälle zwangläufiger Getriebe bietet keine Schwierigkeit. Es zeigt sich, daß die Aufgabe, die Beschleunigung irgend eines Punktes eines zwangläufigen Getriebes zu bestimmen, sobald die Beschleunigung eines anderen gegeben ist, im wesentlichen durch Ziehen von geraden Linien gelöst werden kann. Außer dem schon von O. Mohr benutzten Satz über die Beziehung

[1]) Es möge hier nur auf die Veröffentlichungen von M. Grübler, K. Körner, R. Mehmke, O. Mohr, R. Müller, F. Wittenbauer u. a. verwiesen werden.

der Beschleunigungen der Punkte einer starren Scheibe zueinander, erfordert ihre Lösung nur die Kenntnis der Sätze über ähnliche Dreiecke. Der in Rede stehende Satz findet seinen angemessenen zeichnerischen Ausdruck in den gleichfalls schon von O. Mohr benützten Beschleunigungsplänen. Diese wurden in letzter Zeit u. a. von Prof. Wittenbauer († 16. Februar 1922) und zwar auch in seiner letzten, in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure veröffentlichten Arbeit: »Zeichnende Kinematik im Werkzeugmaschinenbau«[1]), insbesondere aber in seinem großen, soeben erschienenen Werke über Graphische Dynamik[2]) verwertet. Durch eine geringfügige Abänderung gelingt es, das Verfahren noch durchsichtiger zu gestalten und seine praktische Anwendbarkeit zu erhöhen. Dadurch wird insbesondere erzielt, daß die Maßstäbe für Längen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nicht miteinander verknüpft werden und unabhängig voneinander und völlig willkürlich so gewählt werden können, wie sie den gegebenen Größenverhältnissen angepaßt sind.

1. Die Methode. Die Grundlage für die Konstruktion der Beschleunigungspläne ist die Beziehung der Beschleunigungen zweier Punkte A, B einer starren Scheibe. Ist zunächst A fest und vollführt daher B eine Kreisbewegung um A, von der ω die Winkelgeschwindigkeit und $\dot{\omega}$ die Winkelbeschleunigung sind, ist ferner $\overline{AB} = l$, so sind die Komponenten der »relativen Beschleunigung« b_{AB} von B gegen A:

$$b_{AB}^{(n)} = l\,\omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1), \qquad b_{AB}^{(t)} = l\,\dot{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

die erste ist die »relative Normalbeschleunigung« von B gegen A und liegt $\parallel l$, die zweite die »relative Tangentialbeschleunigung« und liegt $\perp l$.

Wenn wir als Zeichen der Vektoreigenschaft einer Größe einen über den Buchstaben gesetzten Strich verwenden, so folgt für die gesamte Beschleunigung $\bar{b}_{AB}$ von B gegen A:

$$\bar{b}_{AB} = \bar{b}_{AB}^{(n)} + \bar{b}_{AB}^{(t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Nun gilt der Satz, der aus dem Vektorcharakter der Beschleunigung unmittelbar folgt und auch durch direkte Rechnung bewiesen werden kann:

Wenn A selbst die Beschleunigung $\bar{b}_A$ besitzt, und die Scheibe eine durch ω und $\dot{\omega}$ bestimmte Drehbewegung ausführt, so ist die Beschleunigung $\bar{b}_B$ irgend eines Scheibenpunktes B:

$$\bar{b}_B = \bar{b}_A + \bar{b}_{AB} = \bar{b}_A + \bar{b}_{AB}^{(n)} + \bar{b}_{AB}^{(t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

worin die Beträge von $\bar{b}_{AB}^{(n)}$ und $\bar{b}_{AB}^{(t)}$ durch (1) und (2) gegeben sind.

Für die Anwendung auf zwangläufige Getriebe bemerken wir, daß die Verhältnisse der ω der einzelnen Getriebeglieder aus der Lage der Drehpole des Getriebes abzulesen und daher nach Festlegung eines einzigen ω bestimmt sind. Sobald die (absolute) Beschleunigung $\bar{b}_A$ irgend eines Getriebepunktes A angenommen ist, für den der Bahnkrümmungsmittelpunkt O_1 und $\overline{O_1 A} = r_1$ bekannt sind, so ist mit dessen Normalkomponente $b_A^{(n)}$ auch die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Getriebegliedes gegeben, mit dem r_1 verbunden gedacht werden kann; es ist: $b_A^{(n)} = r_1\,\omega_1{}^2$; da alle vorkommenden relativen Normalbeschleunigungen nur von den Verhältnissen der ω der einzelnen Getriebeglieder abhängen, so müssen sie sich alle durch Benutzung der Lagen der Drehpole unmittelbar mittels $b_A^{(n)}$ ausdrücken lassen. In der zeichnerischen Ausnützung dieser Tatsache beruht die Ergänzung, auf die oben hingewiesen wurde.

Dagegen sind die $b_{AB}^{(t)} = l\dot{\omega}$ auf direkte Weise nicht zeichnerisch erfaßbar. Wenn man jedoch die Bedingungen des Zwanglaufs benutzt, so kann man sehr leicht einsehen, daß man für die Ermittlung der Beschleunigungen aller Getriebepunkte mit »ähnlichen« Veränderungen der Normalkomponente $\bar{b}_A^{(n)}$ der gegebenen Beschleunigung $\bar{b}_A$, also mit Ziehen von Parallelen auskommt.

---

[1]) Z. Bd. 66, 1922, S. 25 u. 60.

[2]) Die Fertigstellung des Druckes dieses Werkes wurde nach dem letztwilligen Wunsche Prof. Ws. vom Verfasser besorgt.

Ferner ergibt sich aus den oben angeschriebenen Gleichungen unmittelbar die Richtigkeit des Satzes:

Trägt man die Beschleunigungen $\bar{b}_A$, $\bar{b}_B$, $\bar{b}_C \dots$ der Punkte A, B, $C \dots$ einer Scheibe von einem »Pole« P vektoriell auf, dann bilden die Endpunkte der so erhaltenen Strecken eine zu A, B, $C \dots$ ähnliche Figur (Satz von Mehmke).

Dieser Satz dient dazu, die Beschleunigung $\bar{b}_C$ irgend eines anderen Punktes C einer Scheibe zu ermitteln, sobald die Beschleunigungen $\bar{b}_A$, $\bar{b}_B$ der Punkte A und B derselben Scheibe bekannt sind.

Wir geben nun die Anwendung dieser Methode für einige praktisch wichtige Getriebe, die im wesentlichen Sonderfälle des Kurbelviereckes sind und daher alle dieselbe Behandlung gestatten wie dieses. Auch für die Wälzhebelsteuerung (u. dgl.), die ein bewegtes Glied mehr als das Kurbelviereck und dafür noch eine zusätzliche »Bedingung« enthält, ist die Frage der Ermittlung der Beschleunigung durch eine geringfügige Erweiterung mit denselben Hilfsmitteln lösbar.

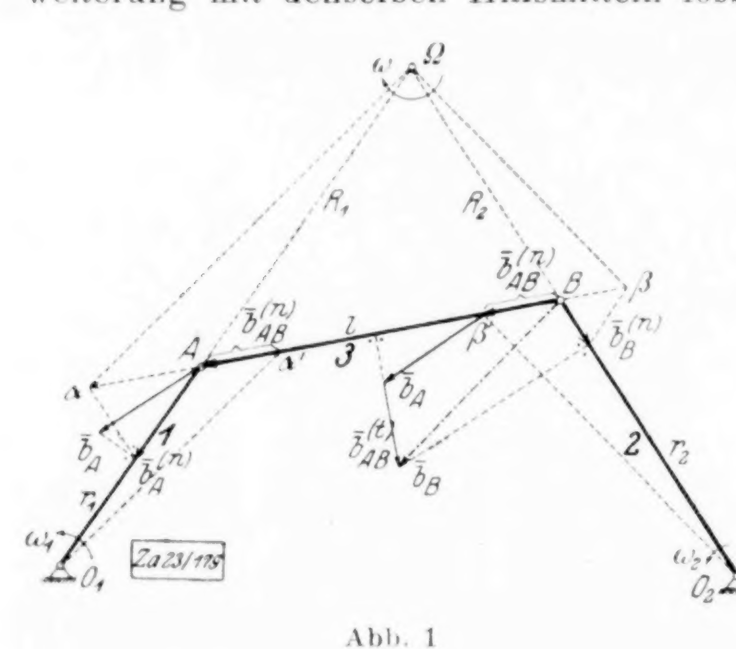


Abb. 1

2. Kurbelviereck. Es mögen die Abmessungen und Bezeichnungen der Abb. 1 gelten. Gegeben sei $\bar{b}_A$, zu bestimmen $\bar{b}_B$. In Gl. (4) ist nach Gl. (1) zu setzen:

$$b_A^{(n)} = r_1\,\omega_1^{\,2}, \quad b_{AB}^{(n)} = l\,\omega^2;$$

da nach Abb. 1 die Geschwindigkeit v_A von A in folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$v_A = r_1\,\omega_1 = R_1\,\omega, \text{ also } \omega = \frac{r_1}{R_1}\,\omega_1\,,$$

so folgt

$$b_{AB}^{(n)} = l\,\frac{r_1^{\,2}}{R_1^{\,2}}\,\omega_1^{\,2} = \frac{r_1}{R_1}\,\frac{l}{R_1}\,r_1\,\omega_1^{\,2} = \frac{r_1}{R_1}\,\frac{l}{R_1}\,b_A^{(n)} \quad (5).$$

Wenn der Einfachheit halber der Endpunkt eines Vektors durch den Buchstaben bezeichnet wird, der den betreffenden Vektor kennzeichnet, so kann die in dieser Gleichung gegebene Aussage in folgende Konstruktion umgesetzt werden:

Man ziehe: $b_A^{(n)}\,\alpha \parallel B\,\Omega$, $O_1\,\alpha' \parallel \alpha\,\Omega$, dann ist $\overrightarrow{\alpha' A} = b_{AB}^{(n)}$, und zwar ist der Pfeil der relativen Normalbeschleunigung von B gegen A immer gegen A gerichtet. Da ferner $v_B = r_2\,\omega_2 = R_2\,\omega$, also $\omega_2 = \frac{R_2}{r_2}\,\omega$, so wird:

$$b_B^{(n)} = r_2\,\omega_2^{\,2} = r_2\,\frac{R_2^{\,2}}{r_2^{\,2}}\,\omega^2 = \frac{R_2}{r_2}\,\frac{R_2}{l}\,l\,\omega^2 = \frac{R_2}{r_2}\,\frac{R_2}{l}\,b_{AB}^{(n)} \quad \dots\dots \quad (6),$$

welche Gleichung sich nach (5) unmittelbar hätte anschreiben lassen.

Macht man daher $B\beta' = \bar{b}_{AB}^{(n)}$, zieht $\Omega\,\beta \parallel \beta'\,O_2$, $\beta\,b_B^{(n)} \parallel A\,\Omega$, so erhält man $\bar{b}_B^{(n)}$. Setzt man ferner an $B\beta' = b_{AB}^{(n)}$ das $\bar{b}_A$ an, errichtet in dessen Endpunkt eine Normale zu l, so liegt in dieser Normalen der Endpunkt von $\bar{b}_B$. Ebenso liegt dieser Endpunkt in der Normalen zu r_2 durch den Endpunkt von $\bar{b}_B^{(n)}$. Dadurch ist $\bar{b}_B$ selbst, und damit ist auch $\bar{b}_{AB}^{(t)} = l\,\dot{\omega}$ gefunden.

Aus der Anordnung nach Abb. 1 ergibt sich, daß diese Konstruktion unmittelbar umkehrbar ist, d. h. aus dem gegebenen $\bar{b}_B$ auch das zugehörige $\bar{b}_A$ liefert.

Aus den Gl. (6) und (5) ergibt sich weiterhin auch:

$$b_B^{(n)} = \frac{R_2}{r_2}\,\frac{R_2}{R_1}\,\frac{r_1}{R_1}\,b_A^{(n)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7),$$

welcher Ausdruck sich auch unmittelbar konstruieren ließe.

Wegen der großen Einfachheit des Verfahrens, das immer auf die Verwertung ähnlicher Dreiecke hinausläuft, wird es zulässig sein, die Erklärungen für die einzelnen Konstruktionen in den folgenden Beispielen noch kürzer zu halten.

3. Schubkurbel. Bei der Schubkurbel nach Abb. 2 bewegt sich A auf einem Kreise und B auf einer Geraden. Es ist wieder $v_A = r_1\,\omega_1 = R_1\,\omega$, daher wie zuvor:

$$b^{(n)}_{AB} = l\,\omega^2 = \frac{r_1}{R_1}\,\frac{l}{R_1}\,b^{(n)}_A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Man mache daher $b^{(n)}_A \alpha \parallel B\,\Omega$, $O_1\,\alpha' \parallel \alpha\,\Omega$, damit $\overrightarrow{\alpha' A} = b^{(n)}_{AB}$.

Da die Richtung von b_B vorgeschrieben ist (B macht eine geradlinige Bewegung), so ziehe man durch α' eine Normale zu l, durch den Endpunkt von $\bar{b}_A$ eine Parallele zur Bewegungsrichtung von B, dann erhält man in dem »Beschleunigungsplan« $\bar{b}_B$ und $\bar{b}^{(t)}_{AB}$.

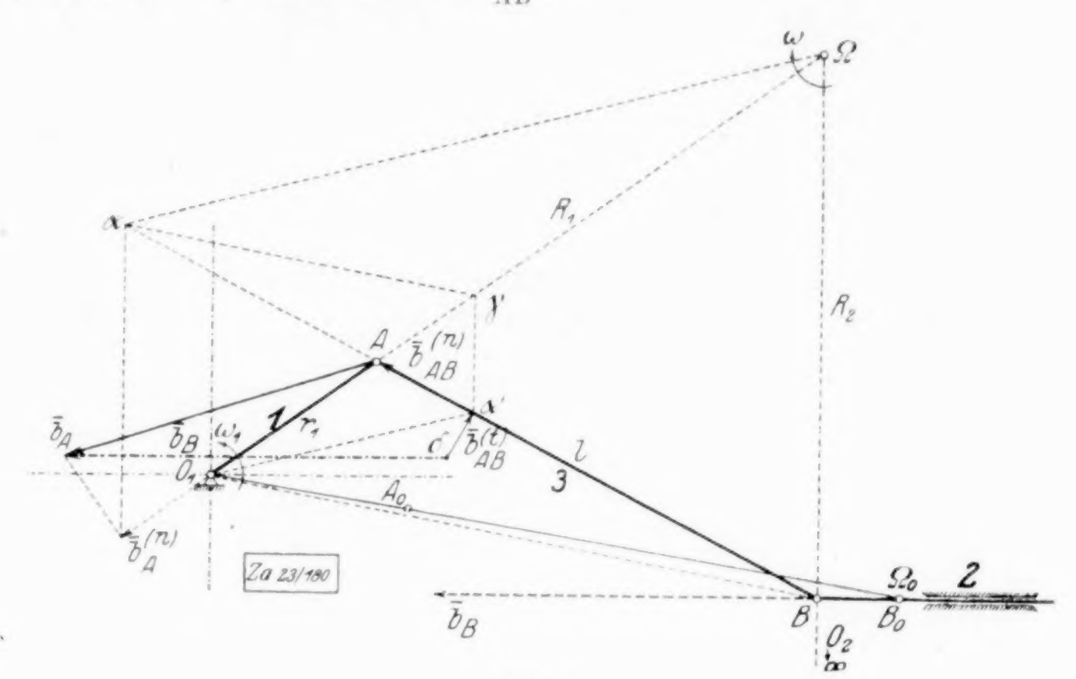


Abb. 2

Da übrigens Gl. (8) auch so geschrieben werden kann:

$$b^{(n)}_{AB} = \frac{l}{R_1}\,\frac{r_1}{l}\,\frac{l}{R_1}\,b^{(n)}_A \quad (9),$$

so kann man auch so vorgehen: Man mache: $b^{(n)}_A\,\alpha \parallel B\,\Omega$ wie zuvor, $\alpha\gamma \parallel O_1 B$, $\gamma\alpha' \parallel B\Omega$, dann ist $\overline{\alpha' A} = b^{(n)}_{AB}$ wie zuvor. Diese Art der Bestimmung von $\bar{b}_B$ ist unter dem Namen der »Mohrschen Konstruktion der Beschleunigung des Kreuzkopfes« bekannt; sie hat vor der zuerst angegebenen den Vorteil, daß der Drehpol Ω nicht erreichbar zu sein braucht.

Für die Totpunkte der Scheibe versagt diese Konstruktion; die Gl. (4), auf die sie sich stützt, gilt aber unverändert weiter. Für die äußere Totlage A_0 ist z. B. $v_{A_0} = r_1\,\omega_1 = l\,\omega$, daher

$$b^{(n)}_{A_0 B_0} = l\,\omega^2 = \frac{r_1}{l}\,r_1\,\omega^2 = \frac{r_1}{l}\,b^{(n)}_A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

welcher Ausdruck aus $b^{(n)}_A$ unmittelbar konstruierbar ist.

4. Die Kurbelschwinge nach Abb. 3 wird auf ganz ähnliche Weise behandelt. Um aus $\bar{b}_A$ die Beschleunigung b_B des in der Drehhülse gleitenden Punktes B der Schwinge zu erhalten, haben wir, da $v_A = r_1\,\omega_1 = R_1\,\omega$, in Gl. (4) zu setzen:

$$b^{(n)}_{AB} = l\,\omega^2 = \frac{r_1}{R_1}\,\frac{l}{R_1}\,r_1\,\omega_1{}^2 = \frac{l}{R_1}\,\frac{r_1}{R_1}\,b^{(n)}_A \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Man mache daher $b^{(n)}_A\,\alpha \parallel B\,\Omega$, $O_1\,\alpha' \parallel \alpha\,\Omega$, dann ist $\overrightarrow{\alpha' A} = b^{(n)}_{AB}$.

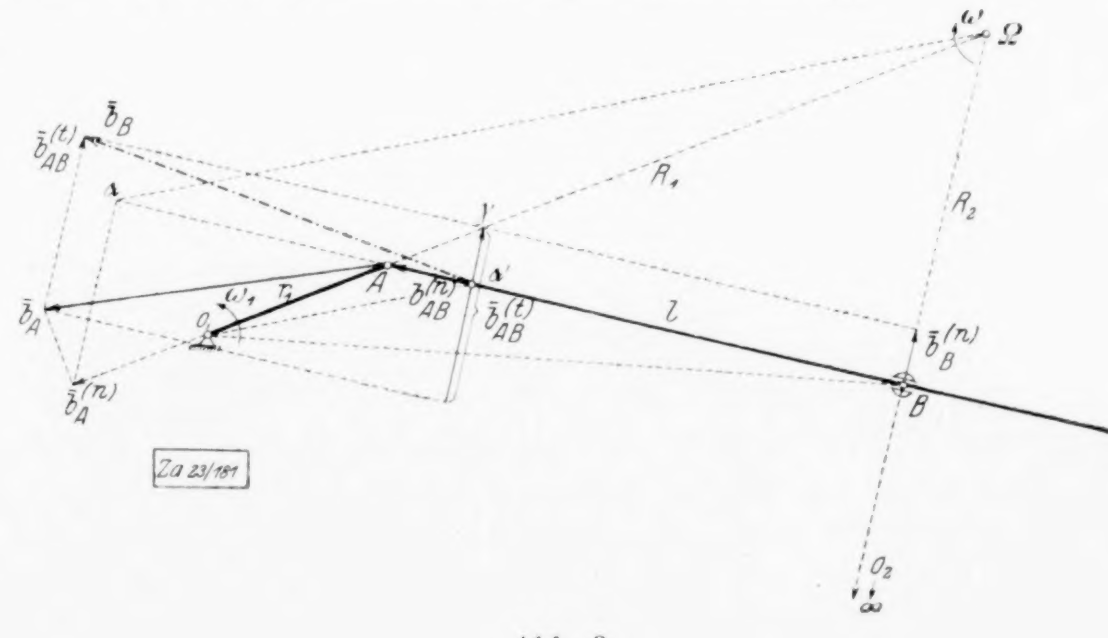


Abb. 3

Da ferner der Punkt B mit der Geschwindigkeit $R_2\omega$ in der Richtung der Stange l gleitet und dieser Geschwindigkeit die Normalbeschleunigung entspricht:

$$b_B^{(n)} = R_2\,\omega^2 = \frac{R_2}{l}\,l\,\omega^2 = \frac{R_2}{l}\,b_{AB}^{(n)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

so mache man $\alpha'\gamma \perp l$, dann ist $\overrightarrow{\alpha'\gamma} = b_B^{(n)}$. Damit sind dann auch $b_{AB}^{(t)}$, $b_B^{(t)}$ und $b_B = b_B^{(n)} + b_B^{(t)}$ gefunden (Abb. 3).

5. Die unrunde Steuerscheibe. a) Unmittelbarer Antrieb der Ventilstange. Die unrunde Steuerscheibe (Steuernocke) nach Abb. 4 kann unmittelbar als Schubkurbel nach der in **3**, Abb. 2, gegebenen Konstruktion behandelt werden. Dem Drehpunkt O_1 der Steuerscheibe entspricht der Drehpunkt der Kurbel, dem Krümmungsmittelpunkt A der Profilkurve an der betreffenden Stelle entspricht der Kurbelzapfen, dem Berührungspunkte B der Ventilstange an der Steuerscheibe entspricht der Kreuzkopf des Schubkurbelgetriebes.

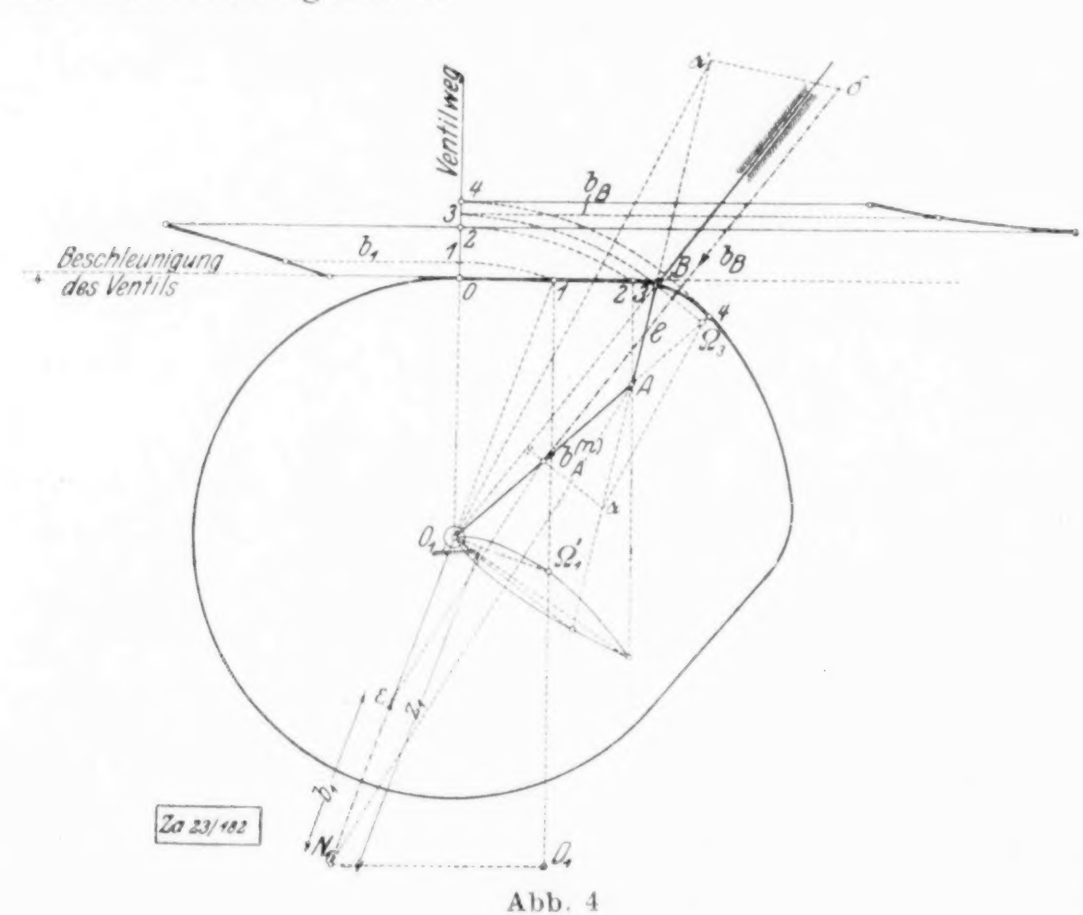


Abb. 4

Um die Profilkurve nicht in jeder Lage neu zeichnen zu müssen, könnte man die umgekehrte Bewegung betrachten, d. h. die Scheibe festhalten und die Führung der Ventilstange um den Drehpunkt der Scheibe O_1 herumbewegen. Die Betrachtung der umgekehrten Bewegung wird aber vermieden, wenn man wohl die Konstruktion in den verschiedenen Lagen der um die feste Scheibe herumgeführten Ventilstange ausführt, die erhaltenen Beschleunigungen und die Wege jedoch unmittelbar von irgend einer festen Lage der Stange aus aufträgt, wie dies in Abb. 4 von der Stelle 0 aus geschehen ist.

Wenn die Beschleunigung der Ventilstange auf konstante Drehgeschwindigkeit ω_1 der Scheibe bezogen wird und wenn die gegebene Normalbeschleunigung von $A : b_A^{(n)}$ ist, so sind in der Stellung 3 der Stange folgende Linien zu ziehen (wobei die Bezeichnungen teilweise dieselben sind wie in Abb. 2):

$b_A^{(n)}\alpha \perp$ Bewegungsrichtung von B, $O_1\alpha' \parallel \alpha\,\Omega_3$, dann ist $\overrightarrow{\alpha' A} = b_{AB}^{(n)}$. Zieht man ferner $\alpha'\delta \perp l$, und legt durch den Endpunkt von $b_A^{(n)}$ eine Parallele zur Bewegungsrichtung von B, dann ist $\overline{\delta\, b_A^{(n)}} = b_B$. Nun dreht man um den »Ventilweg« $\overline{O_1 B} = \overline{O_1 3}$ in die Ausgangsstellung zurück und trägt dort $b_B \perp$ zur Bewegungsrichtung der Ventilstange an. Dies für alle Punkte des kreisförmigen Anhubes 2 . . . . 4 ausgeführt, gibt die zugehörige Verteilung der Ventilbeschleunigungen an.

Für die Stelle 1 des geradlinigen Anhubs 0 . . . . 2 gilt die folgende bekannte und einfache Konstruktion: Man zeichne den Drehpol Ω_1' der Stange in der Lage 1, mache $\overline{1\,\Omega_1'} = \overline{\Omega_1' D_1}$, ziehe $D_1 N_1 \perp D_1 1$, dann ist

$$\overline{O_1 N_1} = z_1 = b_1/\omega_1^2,$$

wenn die Ventilbeschleunigung in 1 einfach mit b_1 bezeichnet wird; da $b_A^{(n)} = r_1\,\omega^2$ gegeben ist, so folgt

$$b_1 = z_1\,\omega_1^2 = \frac{z_1}{r_1}\,r_1\,\omega_1^2 = \frac{z_1}{r_1}\,b_A^{(n)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13);$$

zieht man daher $b_A^{(n)} \zeta \parallel A N_1$, so ist $\overline{N_1 \zeta} = b_1$. Diese Konstruktion für alle Punkte des geradlinigen Anhubs ausgeführt, gibt den zu den Lagen 0 . . . . 2 gehörigen Teil der Beschleunigungs-Weg-Linie, die nunmehr in 2 den durch die Unstetigkeit in der Krümmung der Profilkurve bedingten Beschleunigungssprung deutlich erkennen läßt.

Ein einfacher Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Abb. 5 ablesen. Da sowohl die absolute wie auch die relative Bahn von A geradlinig sind, so kann das Geschwindigkeitsdreieck, das die absolute, relative und Systemgeschwindigkeit miteinander verbindet, unmittelbar gezeichnet werden; es ist dabei $v_a = r\omega$, wenn $\overline{B\Omega} = r$ und $v_{rel} = \frac{v_a}{\cos\alpha} = \frac{r\omega}{\cos\alpha}$. Nun wird die absolute Beschleunigung $\bar{b}_A$ von A durch die relative $(\bar{b}_{rel})$, die System- $(\bar{b}_s)$ und die Coriolisbeschleunigung $\bar{b}_c$ mittels der bekannten Formel ausgedrückt:

$$\bar{b}_A = \bar{b}_{rel} + \bar{b}_s + \bar{b}_c\,.$$

Darin ist zu setzen: $b_s = R\omega^2$; wählen wir den Maßstab für b_s so, daß $b_s = \overline{AB} = R$, so folgt weiter

$$b_c = 2\,v_{rel}\,\omega = \frac{2\,r\omega^2}{\cos\alpha} = 2\,\overline{A\Omega} = \overline{AD}$$

in demselben Maßstab, in dem $b_s = R$ ist. Zieht man daher $DN \parallel$ zur Bewegungsrichtung von A, so ist $\overline{NB} = b_A$ und außerdem $\overline{DN} = b_{rel}$, und zwar wieder in dem durch $b_s = R$ festgelegten Maßstabe.

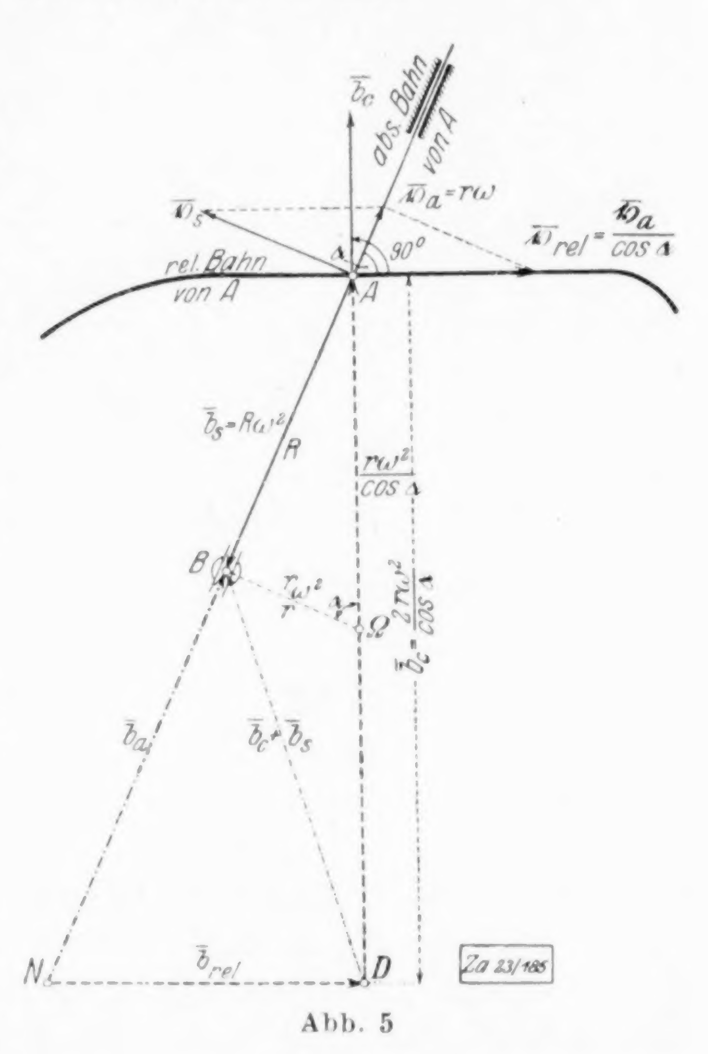


Abb. 5

Die hier gegebenen Konstruktionen bleiben auch ohne weiteres anwendbar, wenn die Führung der Ventilstange nicht gerade durch den Drehpunkt O_1 der Scheibe, sondern seitlich daran vorbeigeht; dann ist das entsprechende Getriebe die »geschränkte« Schubkurbel, und die in Abb. 2 gegebene Konstruktion findet unmittelbar dafür Verwendung.

b) Antrieb der Ventilstange durch Zwischenschaltung eines Ventilhebels. Wenn die Steuerscheibe nicht unmittelbar auf die Ventilstange einwirkt, sondern unter Zwischenschaltung (einer Führungsrolle und) eines Hebels nach Abb. 6, dann ist das Getriebe, das diesem Antriebe entspricht, das gewöhnliche Kurbelviereck nach Abb. 1. Die Konstruktion der Beschleunigung des Punktes B (auf der Parallelkurve zum Scheibenprofil gelegen) ist in Abb. 6 genau mit den Beziehungen der Abb. 1 durchgeführt und liefert b_B und damit auch die Beschleunigung $\bar{b}_C$ des mit C zusammenfallenden Punktes des Hebels 2, da die Punkte C und B als Punkte derselben Scheibe 2 Beschleunigungen besitzen, die sich wie die Abstände vom Drehpunkt O_2 verhalten und gegen diese unter gleichen Winkeln geneigt sind.

Die Ermittlung der Beschleunigungen für alle Lagen des Ventilhebels geschieht wieder ganz wie vorher, indem man den Hebel mit der Ventilstange in einer Anzahl von verschiedenen Lagen längs der Steuerscheibe einzeichnet und die durch die angegebene Konstruktion erhaltenen Beschleunigungen an einer beliebigen dieser Lagen, als Beschleunigungs-Weg-Linie zur Darstellung bringt.

Für einen Punkt des geraden Anhubs ist es wieder praktisch, O_1, O_2, A und B als Schubkurbel zu betrachten.

Wenn der Hebel 2 (entweder direkt oder unter Zwischenschaltung eines zweiten Winkelhebels) mittels eines in einem Schlitze (od. dgl.) verschiebbaren Zapfens auf die Ventilstange einwirkt, dann ist für die Bewegung dieser Ventilstange auch die relative Beschleunigung dieses Zapfens in dem Schlitze zu berücksichtigen, was auch leicht konstruktiv geschehen kann; diese stellt sich jedoch in den meisten Fällen als klein heraus und kann außer acht gelassen werden.

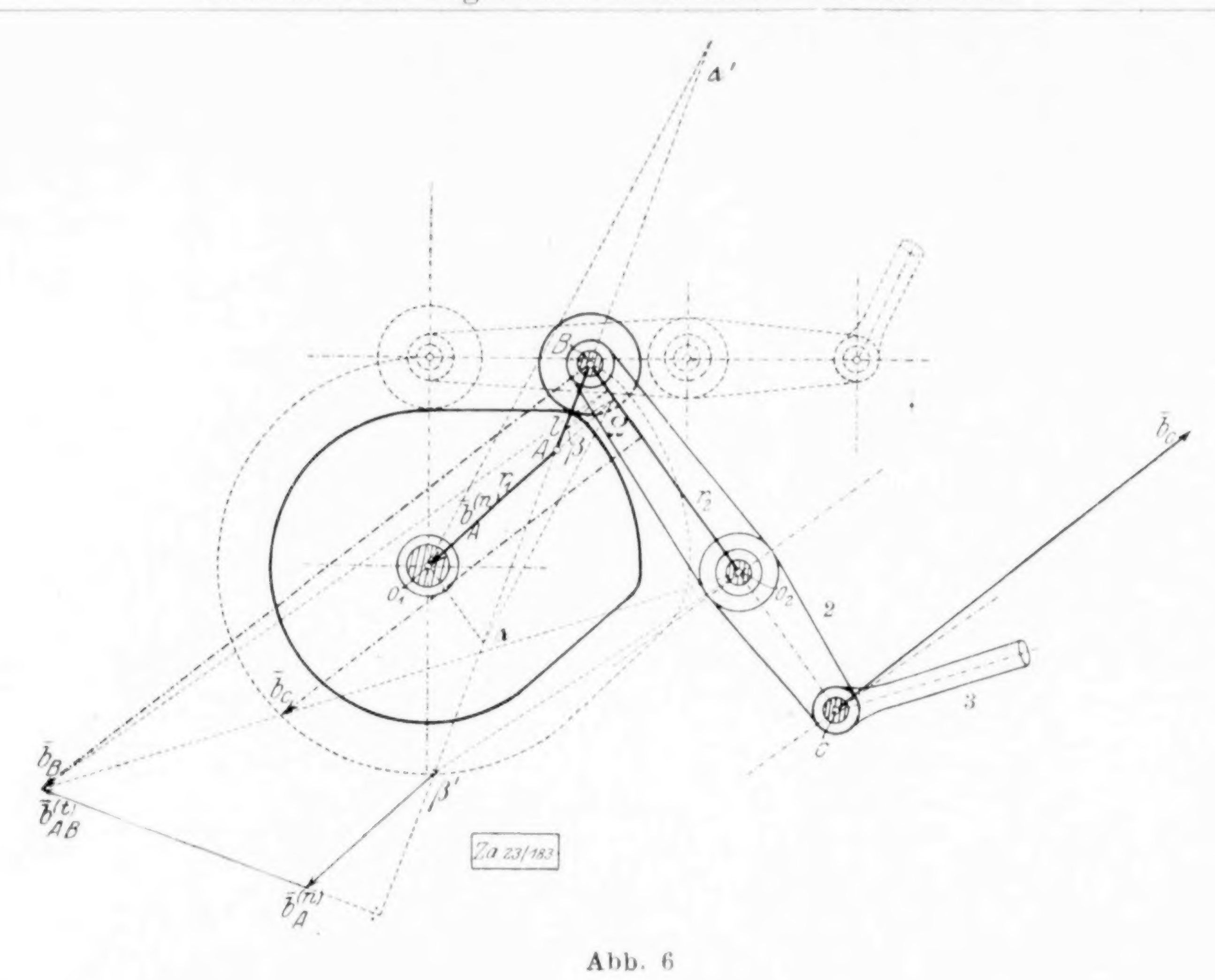


Abb. 6

6. Antrieb der Ventilstange durch Wälzhebel. In Abb. 7 ist das Schema einer einfachen Wälzhebelsteuerung (ohne Regulierung) angenommen, die durch ein Exzenter, das in der Zeichnung als Kurbel $O_1 A$ angedeutet ist, angetrieben wird. Die Lenkerstange $AB = l$ ist durch das Gelenk B mit dem beweglichen Wälzhebel verbunden, der seinerseits durch das Gelenk C die Bewegung des Ventils hervorruft. Es ist die Aufgabe zu lösen, die Beschleunigung $\bar{b}_C$ des Punktes C zu bestimmen, sobald die Beschleunigung $\bar{b}_A$ des Punktes A gegeben ist. Um ein Bild über den Verlauf von $\bar{b}_C$ längs des ganzen Ventilweges zu erhalten, setzen wir voraus, daß A eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt, was bei der im Beharrungszustande laufenden Maschine angenähert zutreffen wird. Es wird also $b_A^{(t)} = O$ angenommen (was für die Konstruktion durchaus nicht wesentlich ist). Für die Normalkomponente $b_A^{(n)} = r_1 \omega_1^2$ sei etwa der Maßstab $b_A^{(n)} = 4\, r_1$ gewählt, wenn $r_1 = \overline{O_1 A}$ den Kurbelhalbmesser bedeutet.

Die Bewegung des Wälzhebels 3 ist durch die Lage des Drehpols Ω_3 und dieser ist durch die Angabe gekennzeichnet, daß die Bewegungsrichtung von C die Lotrechte ist und daß im Berührungspunkte P sein Umriß mit dem Krümmungsmittelpunkt K_2 sich auf dem Umriß der festen Wälzplatte mit dem Krümmungsmittelpunkte K_1 abwälzt. Nach einer bekannten Eigenschaft der Hüllkurven und Hüllbahnen ist K_1 der Krümmungsmittelpunkt der von K_2 als Punkt der Scheibe 3 beschriebenen Bahn und dadurch ist auch der Krümmungsmittelpunkt O_2 der Bahnkurve von B gegeben[1]). Die Bewegung des Wälzhebels ist also darstellbar als Verbindung des Kurbelvierecks $O_1 A B O_2$ und der geschränkten Schubkurbel $(K_1 K_2 C)$, die in B zusammenhängen. Diese beiden Getriebe, die in der Abbildung angedeutet sind, haben wir früher behandelt und haben nichts anderes zu tun, als die früheren Ergebnisse neuerdings anzuwenden.

Die Ermittlung des Krümmungsmittelpunktes $O_2 = K$ der Bahn des Punktes B aus K_1, K_2, Ω ist in Abb. 8 herausgezeichnet. Man wähle H beliebig auf ΩB, verbinde H mit K_1 und K_2 und ziehe $\Omega N \parallel H K_1$, so daß N der Schnitt dieser Parallelen mit $H K_2$ ist; ferner $NJ \parallel \Omega B$ und $JJ' \perp \Omega B$; sodann wähle man G beliebig, ziehe GB und GJ', $\Omega F \parallel GJ'$, $FK \parallel G\Omega$, dann ist K der gesuchte Krümmungsmittelpunkt der Bahn von B. — Der Punkt J kann auch so gefunden werden: es wird M willkürlich gewählt, $LK_1 \parallel MK_2$ gezogen und mit ΩM in L zum Schnitt gebracht; dann ist $LJ \parallel MK_1$.

[1]) Siehe z. B. L. Burmester, Kinematik, I, S. 100.

Für das Kurbelviereck ($O_1 A B O_2$) ergibt sich die Beschleunigung $\bar{b}_B$ von B aus $\bar{b}_A$ durch die in Abb. 1 gegebene Konstruktion, die in Abb. 7 mit denselben Bezeichnungen wie in Abb. 1 durchgeführt ist. Es folgt $\bar{b}_{AB}^{(n)} = \alpha' A = B\beta'$.

Nun ist andererseits wieder nach Gl. (4)

$$\bar{b}_C = \bar{b}_B + \bar{b}_{BC}^{(n)} + \bar{b}_{BC}^{(t)} \quad \text{. . . . . (14)},$$

wobei wegen $r_3\,\omega_3 = R_2\,\omega$, $\overline{\Omega_3 B} = r_3$, $\overline{\Omega B} = R_2$, $\overline{BC} = l_1$:

$$b_{BC}^{(n)} = l_1\,\omega_3^2 = \frac{l_1}{l}\,\frac{R_2^2}{r_3^2}\,l\,\omega^2 = \frac{l_1}{l}\,\frac{R_2^2}{r_3^2}\,b_{AB}^{(n)} \quad \text{. . . . . . . (15)}.$$

Da $B\beta' = \alpha' A = b_{AB}^{(n)}$, so mache man $\Omega\beta'' \parallel \Omega_3\beta'$, $\Omega\beta''' \parallel \Omega_3\beta''$, $\beta'''\gamma \parallel AC$, dann ist $\overrightarrow{\gamma B} = \bar{b}_{BC}^{(n)}$. Da die Richtung von $\bar{b}_C$ bekannt ist, so ist aus Gl. (14) sowohl $\bar{b}_C$ als auch $\bar{b}_{BC}^{(t)}$ bestimmt.

Für die Bewegung von C_1 bis C_2, während welcher das Abwälzen längs der kreisförmigen Stücke von Wälzhebel und Wälzplatte mit den Mittelpunkten K_2 und K_1 erfolgt, ist der Verlauf der Ventilbeschleunigung in die Abbildung eingetragen; sie ist nach den in der Abbildung gewählten Verhältnissen in diesem Stück tatsächlich positiv, was durch den an B angesetzten Beschleunigungsvektor unmittelbar herauskommt. Für diese Aufzeichnung der Beschleunigungs-Weg-Linie ist der Maßstab gleich $1/4$ des ursprünglichen Beschleunigungsmaßstabes gewählt worden.

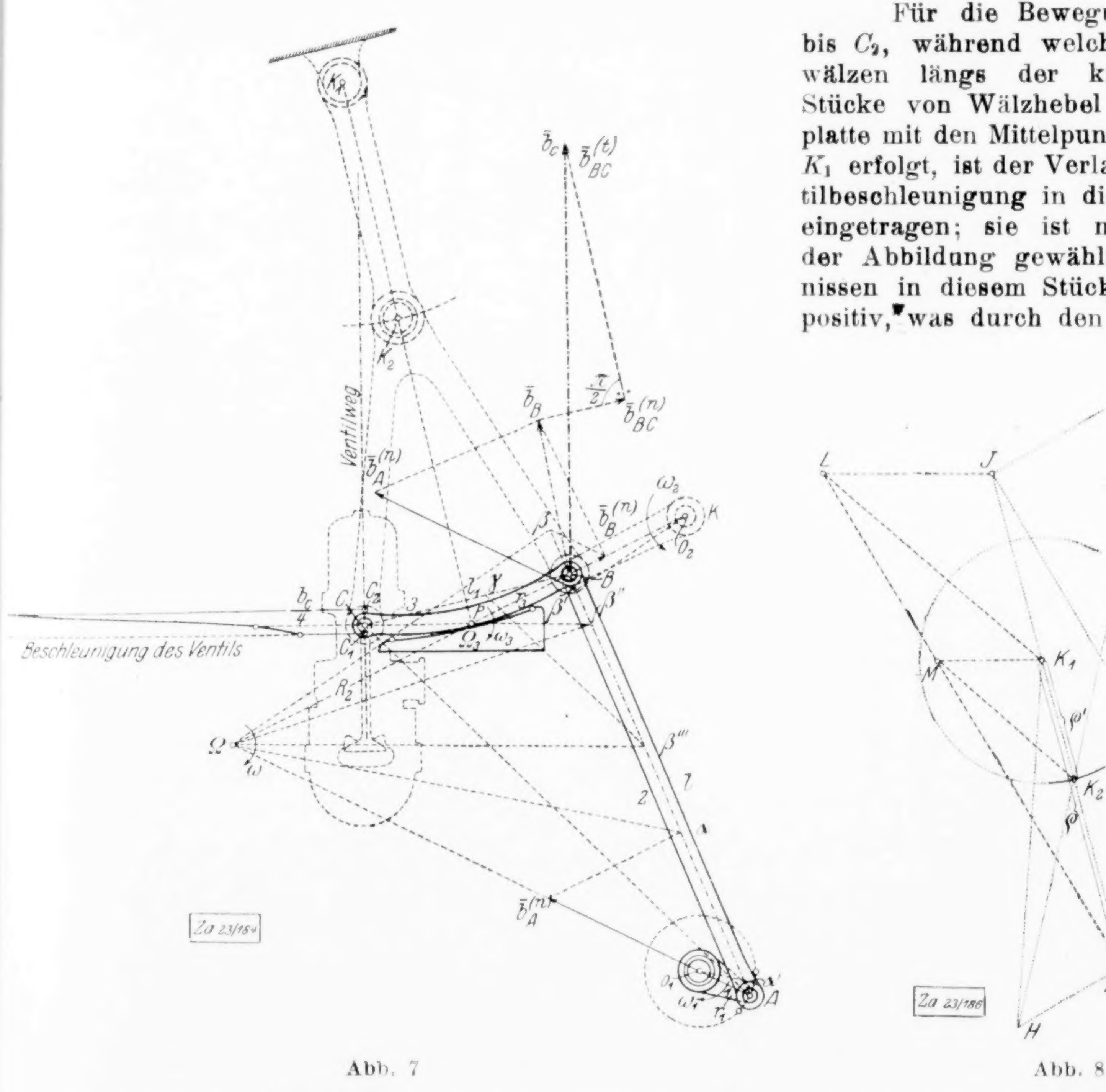


Abb. 7 Abb. 8

An den Stellen, an denen die Krümmung der festen Wälzplatte (oder auch des beweglichen Wälzhebels, oder beider) unstetig wird, was z. B. eintritt, wenn an die bisher betrachteten Kreise Abrundungen mit anderen Halbmessern angesetzt werden, ergibt sich auch ein Sprung in der Beschleunigung des Punktes C, ganz so wie an den Unstetigkeitstellen der Krümmung bei den unrunden Scheiben.

Von Wichtigkeit sind die Beschleunigungen von C in den Totlagen der Kurbel, denen die Umkehrpunkte in der Bewegung von C entsprechen; es ist sofort zu sehen, daß in diesen Totlagen, die etwa durch $O_1 A_0 B_0$, $O_1 A_3 B_3$ bezeichnet seien, auch B_0 und B_3 die Geschwindigkeit 0 haben werden, so daß die Winkelgeschwindigkeit ω_3 von 3 an diesen Stellen null sein muß; es werden also in den Totlagen Normalbeschleunigungen von C gegen B nicht vorkommen. Bestimmt man daher die Beschleunigung $\overline{b}_{B_0}$ in der Totlage B_0 auf die oben angegebene Weise, so ist einfach zu setzen:

$$\overline{b}_{C_0} = \overline{b}_{B_0} + \overline{b}^{(t)}_{B_0 C_0},$$

wodurch $\overline{b}_{C_0}$ und $\overline{b}^{(t)}_{B_0 C_0}$ bestimmt sind, und ebenso für B_3. (Um die Abbildung nicht undeutlich zu machen, sind diese letzteren Ermittlungen nicht eingetragen worden.)

Wenn in irgend einer der Konstruktionen Punkte, die man braucht, außerhalb der Zeichnung fallen oder unsichere Schnitte liefern, kann auch die betreffende Beschleunigung usw. nach den angegebenen Formeln gerechnet werden, wie sich überhaupt eine fortgesetzte Kontrolle der Konstruktion durch Rechnung sehr empfehlen dürfte.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß man natürlich auch die Konstruktion der Beschleunigung von Ventilen, die mit Schwingdaumen angetrieben werden, nach derselben Methode ausführen kann. 228

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Konforme Abbildung.

Von TH. MEYER in Berlin (AEG).

Der nachstehende kurz zusammengefaßte Bericht ist aus einem Vortrag, der vor den Werkstudenten der AEG gehalten wurde, hervorgegangen. Die Art der Darstellung ist darauf berechnet, die komplexen Zahlen und Funktionen dem Ingenieur möglichst anschaulich nahe zu bringen, so daß er Fühlung mit dem Gegenstande gewinnt und erkennt, welch interessantes und vielseitiger Anwendung fähiges, mathematisches Gebiet hier vorliegt, das dem praktischen Ingenieur keine Schwierigkeiten bereiten muß. Die Abbildungen sind Wiedergaben der bei dem Vortrage verwendeten farbigen Diapositive Nr. 239 bis 253, 1130 und 1131, die von der Technisch-Wissenschaftlichen Lehrmittelzentrale Berlin hergestellt und vertrieben werden. Die Schriftleitung will mit der Veröffentlichung dieses Aufsatzes auf die fruchtbaren Ansätze einer modernen Ingenieurfortbildung nachdrücklichst hinweisen.

1. Die Grundoperationen. Wie die reellen Zahlen (negative und positive) der unendlichen Punktreihe einer Geraden entsprechen und umgekehrt, so entsprechen die komplexen Zahlen je einem Punkt der unendlichen zweidimensionalen Ebene (Gaußsche Ebene).

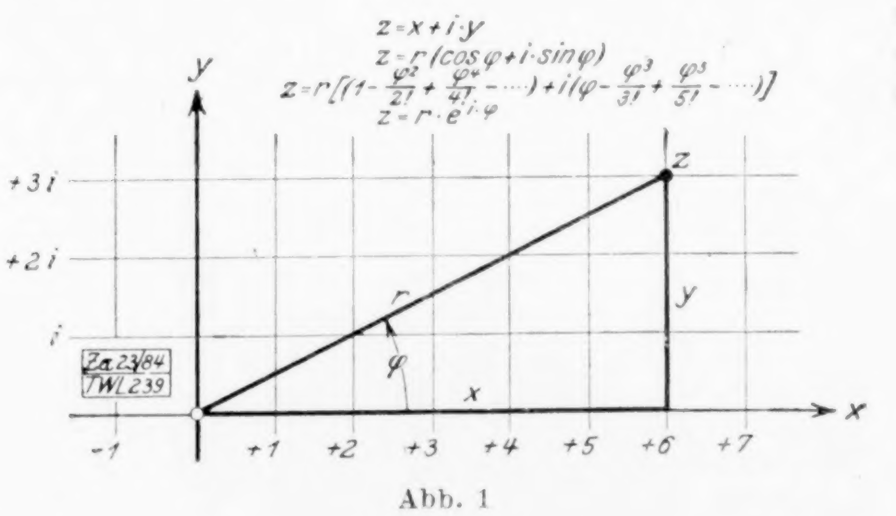
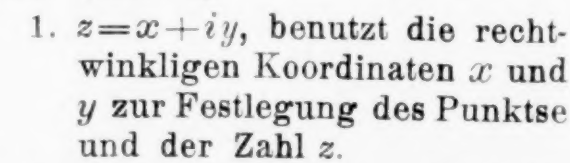


Abb. 1

Es sind drei äquivalente Darstellungen der komplexen Zahlen in der Gaußschen Ebene zu unterscheiden (Abb. 1):



1. $z = x + iy$, benutzt die rechtwinkligen Koordinaten x und y zur Festlegung des Punktse und der Zahl z.
2. a) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, benutzt die Polarkoordinaten r und φ.
   b) $z = r\,e^{i\varphi}$ gewinnt man aus 2 a) durch Addition der Reihen für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$; diese ergeben

$$\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right)$$

oder nach Potenzen von φ geordnet:

$$1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \ldots \quad \text{(Euler)}.$$

Letztere Reihe ist identisch mit der Reihe für $e^{i\varphi}$.

Für die reellen Zahlen als Spezialfälle der komplexen ist in Darstellung 1) $y = 0$, in Darstellung 2) $\varphi = 0$ oder $k\pi$ (k eine ganze Zahl). Für die rein imaginären Zahlen ist entsprechend in 1) $x = 0$, in 2) $\varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.

Konjugiert komplexe Zahlen unterscheiden sich durch das Vorzeichen des imaginären Teiles. Geometrisch liegen die betreffenden Punkte gespiegelt zur reellen Achse (Abb. 2).

In 1) $z_1 = x_1 + i\,y_1, \quad z_2 = x_1 - i\,y_1,$
in 2 a) $z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 - i \sin\varphi_1), \quad z_2 = r_1 (\cos\varphi_1 - i \sin\varphi_1),$
in 2 b) $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_1 e^{-i\varphi_1}.$

Die **Addition** komplexer Zahlen geschieht durch Addition der reellen und imaginären Teile (vergl. Darstellung 1) (Abb. 3).

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy) - (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2).$$

Das Ergebnis der Addition entspricht der vektoriellen Zusammensetzung der Leitstrahlen vom Nullpunkt zu den Punkten, die den einzelnen Summanden entsprechen. Die **Subtraktion** ist von der Addition nicht unterschieden, insofern die Subtraktion einer Zahl der Addition einer Zahl entspricht, die dem Subtrahend in der Zahlenebene bezüglich des Nullpunktes diametral in gleicher Entfernung von diesem gegenüberliegt.

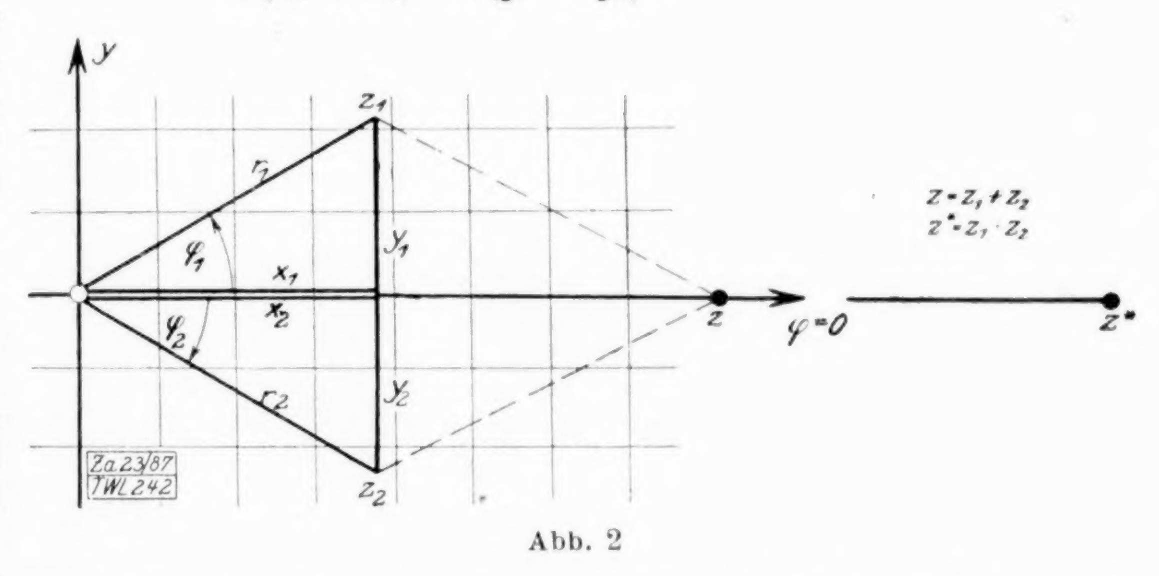


Abb. 2

Die Addition konjugiert komplexer Zahlen ergibt geometrisch als Resultat die vierte Ecke eines Rhombus auf der reellen Achse, arithmetisch eine reelle Zahl.

$$Z_1 = x_1 - i\,y_1$$
$$Z_2 = x_1 - i\,y_1$$
$$Z_1 + Z_2 = 2\,x_1.$$

Die **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen bedient sich zweckmäßig der Darstellung 2 b):

$$z_1 = r_1\, e^{i\varphi_1}$$
$$z_2 = r_2\, e^{i\varphi_2}$$
$$z = z_1 z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r e^{i\varphi},$$

wo jetzt $r = r_1 r_2$ und $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ist.

Danach führt die Multiplikation auf

a) Multiplikation der absoluten Werte, d. h. der Radienvektoren;
b) Addition der Amplituden, wobei eine Drehung entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers als positiv angenommen ist (Abb. 4).

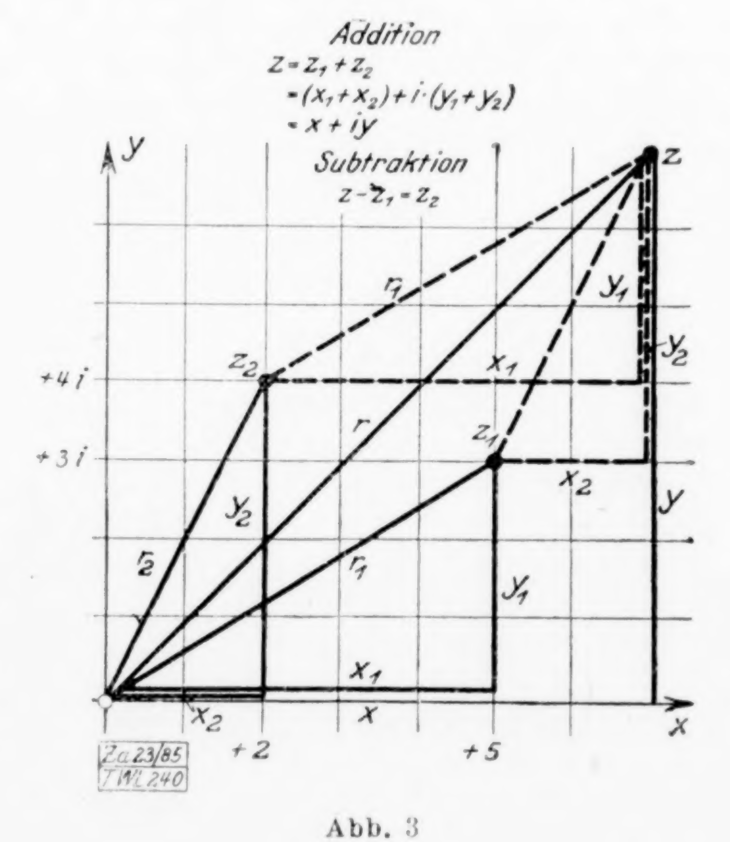


Abb. 3

Entsprechend führt die Division auf eine Division der Radienvektoren bezw. Subtraktion der Amplituden, d. h. Drehung im Sinne des Uhrzeigers.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = r\, e^{i\varphi},$$

wo jetzt $r = \frac{r_1}{r_2}$ und $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ist.

Daraus ergibt sich als reziproker Wert einer Zahl z_1:

$$z = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}\, e^{-i\varphi_1} = r\, e^{i\varphi},$$

wo $r = \frac{1}{r_1}$ und $\varphi = -\varphi_1$ ist.

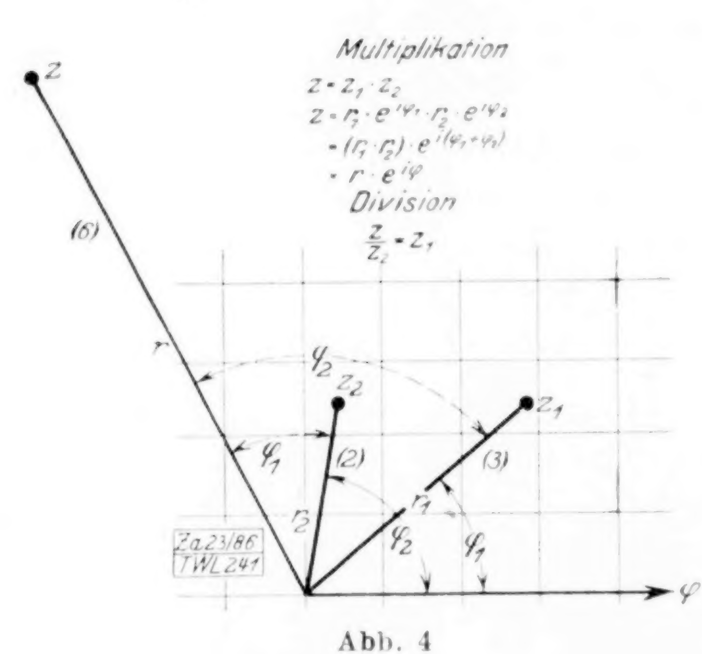


Abb. 4

Die Multiplikation konjugiert komplexer Zahlen führt geometrisch auf einen Punkt der positiv reellen Achse, das Produkt ist positiv reell.

$$z_1 = r_1\, e^{i\varphi_1}$$
$$z_2 = r_1\, e^{-i\varphi_1}$$
$$z_1\, z_2 = r_1^{\,2}.$$

Entsprechend der Multiplikation führt das Potenzieren einer komplexen Zahl auf das Potenzieren des Radiusvektors und die Vervielfachung seiner Amplitude. Bei letzterer kann der Radiusvektor die Ebene bei seiner Umkreisung um den Nullpunkt mehrfach überstreichen (Entstehung einer vielblättrigen Riemannschen Fläche; Entstehung eines Verzweigungspunktes im Nullpunkt). Umgekehrt wird eine komplexe Zahl radiziert, indem der Radiusvektor radiziert und die Amplitude dividiert wird (Abb. 5 und 6).

$$z_1 = r_1\, e^{i\varphi_1}, \qquad z = z_1^{\,n} = r_1^{\,n}\, e^{i n \varphi_1} = r\, e^{i\varphi},$$

wo $r = r_1^{\,n}$, $\varphi = n\,\varphi_1$ ist. n ist entweder eine ganze Zahl (Potenzieren) oder eine gebrochene Zahl (Radizieren). Allgemein ist das Radizieren als Unterbegriff des Potenzierens aufzufassen.

Das Radizieren einer komplexen Zahl führt auf eine Vieldeutigkeit der Wurzeln, da die Amplitude, unter der eine Zahl liegt, um beliebige ganzzahlige Vielfache von 2π vermehrt werden kann.

$$z = r\, e^{i\varphi} = r\, e^{i(\varphi + 2k\pi)}$$

(k eine ganze Zahl). Geometrisch erhält man bei unveränderlichem Radius nach beliebig vielfachen ganzen Umläufen um den Nullpunkt denselben Punkt z. Aus der Endlage des Radiusvektors r kann nicht auf die Anzahl der gemachten Umdrehungen um den Nullpunkt geschlossen werden. Zieht man nun die $n$te Wurzel, so wird diese $n$deutig, inso-

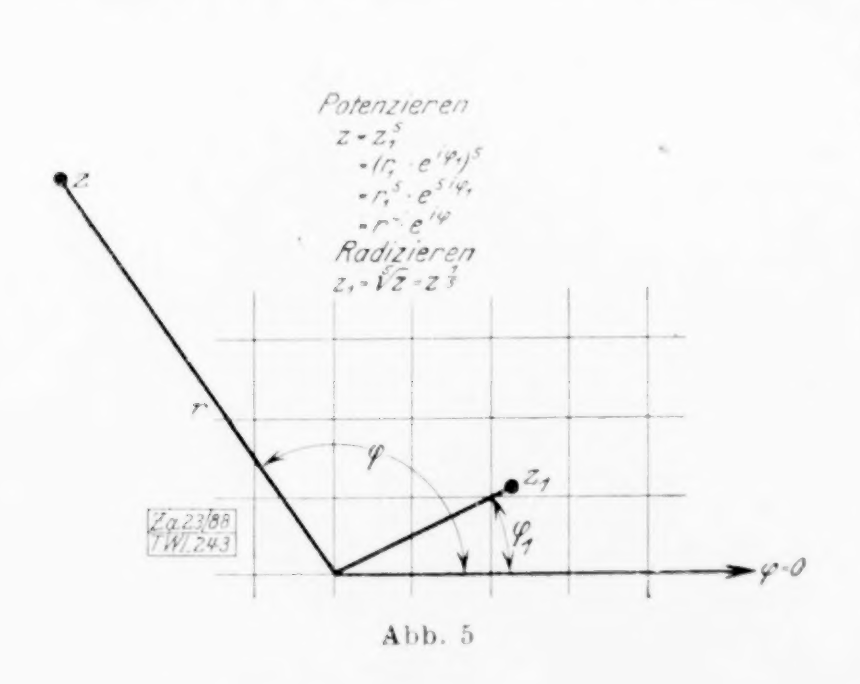


Abb. 5

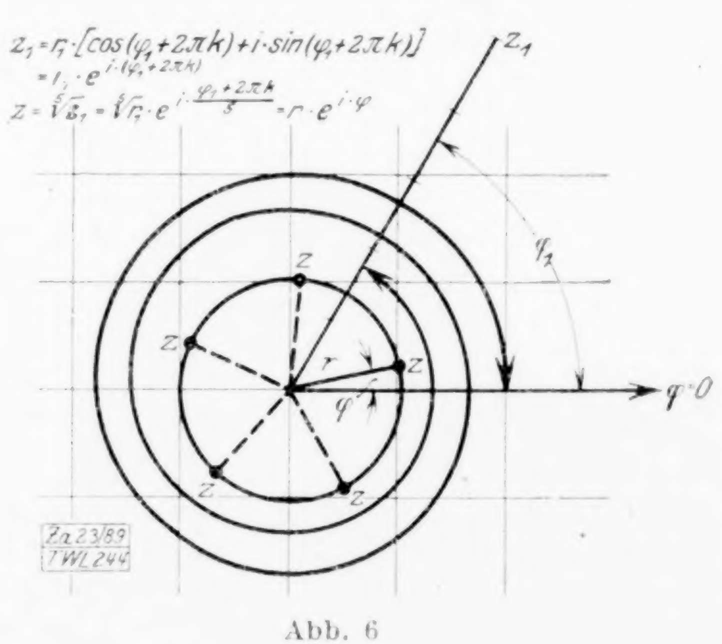


Abb. 6

fern in der Amplitude $(\varphi + 2k\pi)$ k alle ganzen Zahlen durchlaufen kann, und, wenn man die Amplitude in n gleiche Teile teilt, man als Resultat $\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ erhält. Durchläuft hierin k alle ganzen Zahlen, so erhält man die Ergebnisse:

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 4\pi}{n} \ldots \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$\frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \text{ usw.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die zweite Reihe führt auf die erste, nämlich auf die um eine volle Umdrehung 2π vermehrten Werte der Reihe 1.

Bei weiterem Wachsen von k wiederholt sich periodisch dieses Spiel. Als verschiedene Wurzelwerte bleiben nur n. Ebenso ist umgekehrt sofort festzustellen, daß die Addition von $\frac{2k\pi}{n}$ zu dem Wert $\frac{\varphi}{n}$ und nachträgliches Ver-n-fachen dieser Amplitude stets zur Endlage des Vektors unter der Richtung φ führen muß, je nach der Größe von k nach mehrmaligem Umlauf um den Nullpunkt.

Es ist also

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\, e^{i(\varphi + 2k\pi)}} = \sqrt[n]{r}\,[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)]$$

oder

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right] \text{ (Moivre).}$$

Damit sind die Grundrechnungsarten geometrisch veranschaulicht. Wir kommen jetzt zu den Funktionen komplexer Veränderlicher.

2. Die einfachen komplexen Funktionen. Durch die mathematische Beziehung $w = f(z)$ zwischen zwei reellen Variabeln wird eine Wechselbeziehung zwischen zwei Punktreihen hergestellt. Wählt man für die eine, z. B. z, als unabhängige Variable einen beliebigen Wert, so entspricht ihr ein bestimmter Zahlwert w als abhängige Variable; oder wenn z die Punktfolge der Geraden bezw. die Zahlenfolge von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so bewegt sich w zwangläufig entsprechend der gegebenen Gleichung auf den Geraden w. Das gegenseitige Entsprechen der Punkte in diesen beiden Geraden wird als Abbildung bezeichnet. (In der analytischen Geometrie wird diese Abbildung durch Darstellung der Kurven in rechtwinkligen Koordinaten vermittelt; die z- und w-Gerade sind die Achsen des Koordinatensystems.) (Abb. 7.)

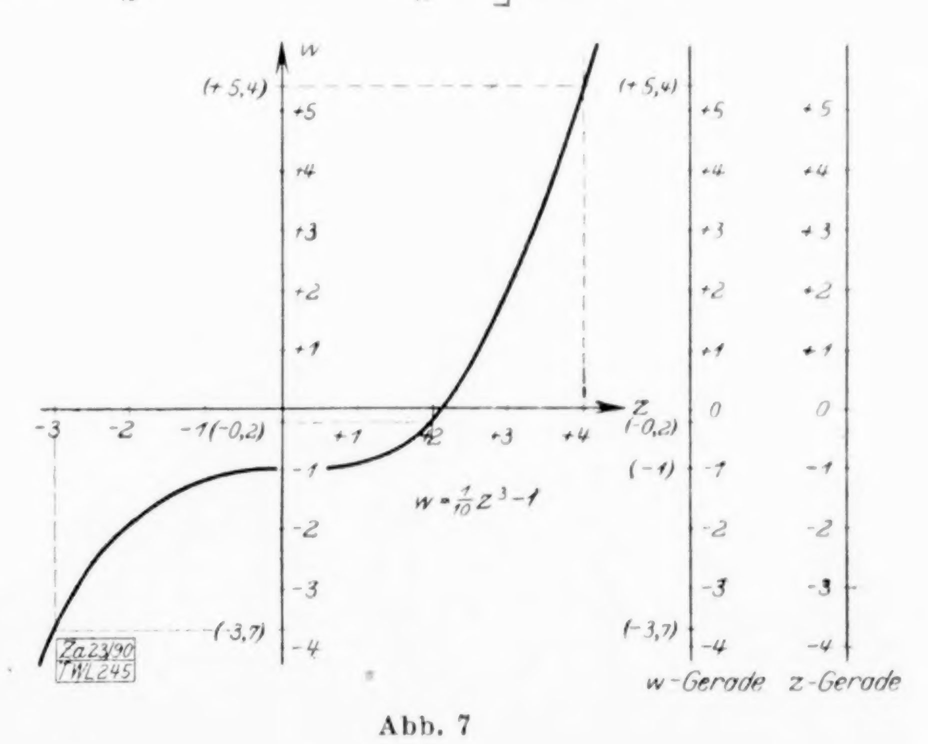


Abb. 7

Beim Uebergang zu komplexen Zahlen entspricht dem Punkt z der z-Ebene ein bestimmter Punkt w der w-Ebene und einer Bewegung des Punktes z in der z-Ebene entspricht eine zwangläufige Bewegung des Bildpunktes w in der w-Ebene. Die mathematische Gleichung zwischen w und z entspricht so gewissermaßen einer kinematischen Kupplung.

Durch Addition einer Zahl $k = a + ib$ zu einer beliebigen Zahl z gelangt man zu einem neuen Zahlwert $w = z + k$. Sucht man den der Zahl $z = x + iy$ der z-Ebene entsprechenden Punkt in der Ebene der Zahlen $w = u + iy$ auf, so findet man, daß entsprechende Punkte der w-Ebene durch Parallelverschiebung der z-Ebene in Richtung des Vektors k erhalten werden.

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ k &= a + ib \\ \hline w = z + k &= (x + a) + i(y + b). \end{aligned}$$

Wie einzelne Bildpunkte durch Verschiebung des Originalpunktes in Richtung des Vektors k erhalten werden, so ergeben sich natürlich auch die Bilder von Kurven der z-Ebene durch Parallelverschiebung dieser Kurvenzüge. Beschreibt der bewegliche Punkt z in der z-Ebene eine Kurve, so beschreibt der entsprechende bewegliche Punkt w in der w-Ebene die gleiche Kurve, parallel in Richtung des Vektors k verschoben. (Abb. 8.)

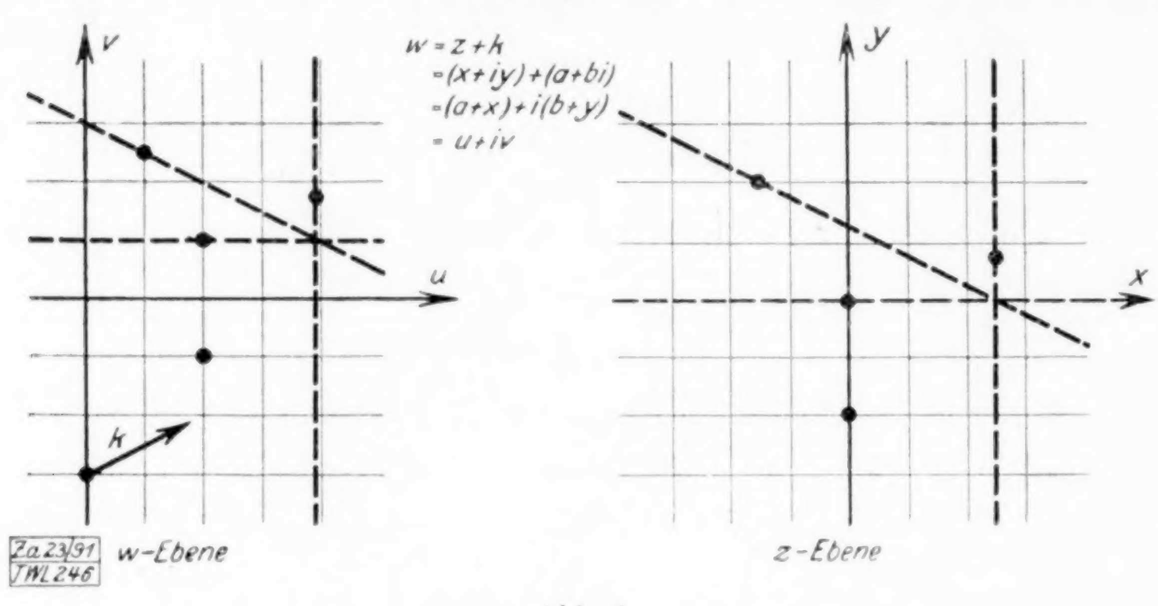


Abb. 8

Sucht man in der w-Ebene die einem Punkte der z-Ebene nach Multiplikation mit einer Zahl $k = r_0 \, e^{i \varphi_0}$ entsprechende Zahl auf, so findet man, daß

1. die Radienvektoren der Zahl z verkleinert bezw. vergrößert werden, je nachdem der Radiusvektor r_0 von $k \lesseqgtr 1$ ist,
2. die Amplitude von z um den konstanten Betrag der Amplitude von k vermehrt wird.

Man erhält demnach die Abbildung der w-Ebene durch Drehung um den Nullpunkt von φ_0 und Dehnung in radialer Richtung (Abb. 9) (Bild einer im Nullpunkt befestigten Kautschukmembran, die um diesen gedreht und im Verhältnis $r_0 : 1$ radial gedehnt wird).

Durchläuft z in der z-Ebene einen Kreis mit dem Radius r, so durchläuft w einen Kreis mit dem Radius $r_0 r$, jedoch eilt der Bildpunkt w dem Punkt z um die Phase φ_0 voraus.

Durchläuft z einen Halbstrahl von 0 aus unter der Amplitude φ, so durchläuft w einen Halbstrahl unter der Amplitude $\varphi + \varphi_0$; der jeweiligen Entfernung r des Punktes z vom Nullpunkt der z-Ebene entspricht eine Entfernung $r \, r_0$ des Punktes w vom Nullpunkt der w-Ebene.



Die Abbildung $w = \frac{1}{z}$, aufgefaßt als Quotient der konstanten Zahl $+1$ und der veränderlichen Zahl z ergibt eine Zahl w, deren Radiusvektor der reziproke Wert des

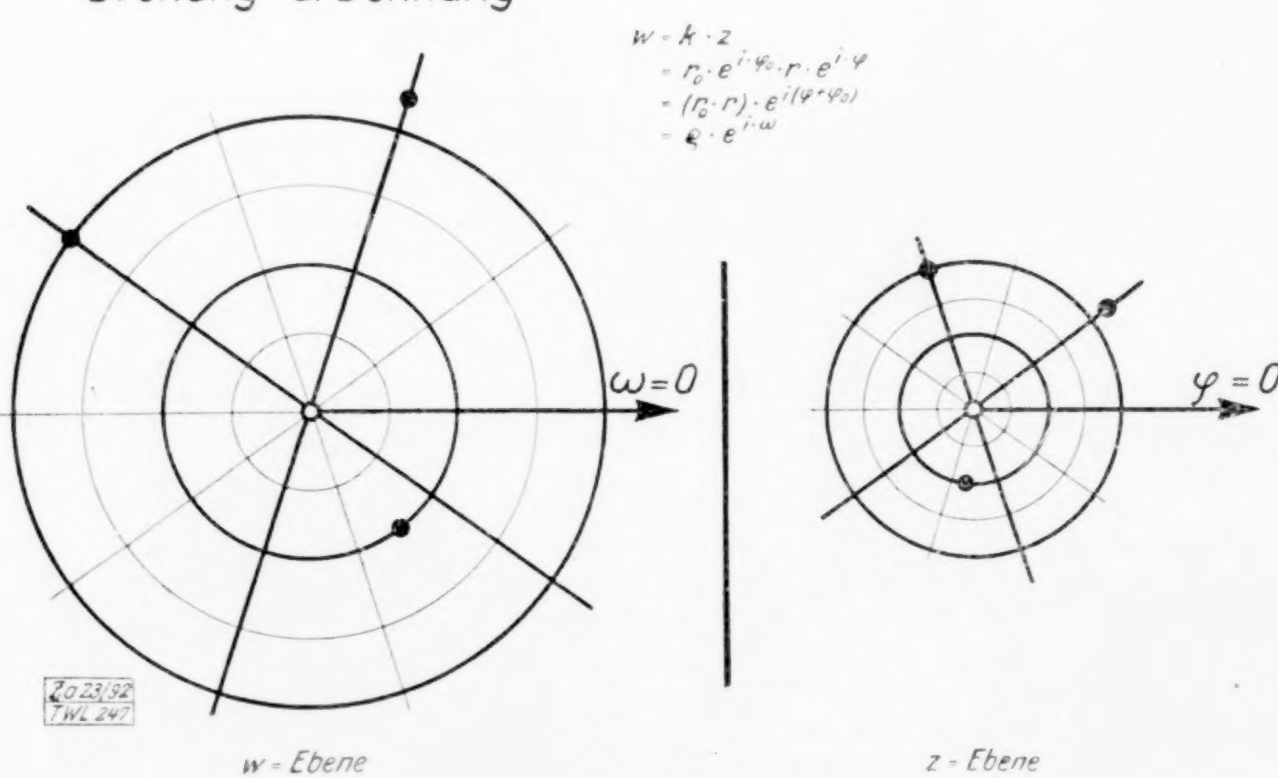


Abb. 9

Radiusvektors von z ist und deren Amplitude entgegengesetzt der von z ist. Die Zahl $+1$ lautet nach Darstellung (2b):

$$+1 = 1\, e^{i\,0}$$
$$z = r\, e^{i\varphi}$$
$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\varphi} = \varrho\, e^{i\omega},$$

d. h. dem Zahlpunkt z mit den Polarkoordinaten r und φ in der z-Ebene entspricht ein Zahlpunkt w der w-Ebene mit den Polarkoordinaten ϱ und ω, die gleich $\frac{1}{r}$ bezw. $-\varphi$ sind.

Wir haben hier geometrisch eine Verbindung von

1. Abbildung durch reziproke Radien.
2. Spiegelung an der reellen Achse.

Es findet gewissermaßen eine Spiegelung am Einheitskreis und an der reellen Achse statt. Demnach entspricht das Aeußere des Einheitskreises in der z-Ebene dem Inneren des Einheitskreises in der w-Ebene und umgekehrt, die Punkte des Einheitskreises den an der reellen Achse gespiegelten Punkten desselben Kreises.

Durchläuft der Punkt z den Einheitskreis der z-Ebene, so durchläuft der Punkt w den Einheitskreis in der w-Ebene in entgegengesetztem Umlaufsinne. Durchläuft der Punkt z einen Strahl von 0 aus bis ins Unendliche, so durchläuft w einen Strahl, der an der reellen Achse gespiegelt ist, vom Unendlichen kommend nach 0. Befindet sich z auf dem Einheitskreis, so befindet sich auch w auf dem Einheitskreis. Kreise um den Nullpunkt innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene, d. h. Zahlen mit gleichem r entsprechen Kreisen außerhalb des Einheitskreises der w-Ebene mit dem Radius $\frac{1}{r}$ und umgekehrt. Einer Geraden in der w-Ebene im Abstande $\frac{1}{d}$ vom Nullpunkt entspricht ein Kreis durch den Nullpunkt mit dem Durchmesser d in der z-Ebene und umgekehrt.

Daraus ergeben sich rechtwinklig schneidende Kreisbüschel in der w-Ebene, die den Parallelen der z-Ebene zu den Koordinatenachsen entsprechen. (Abb. 10.)

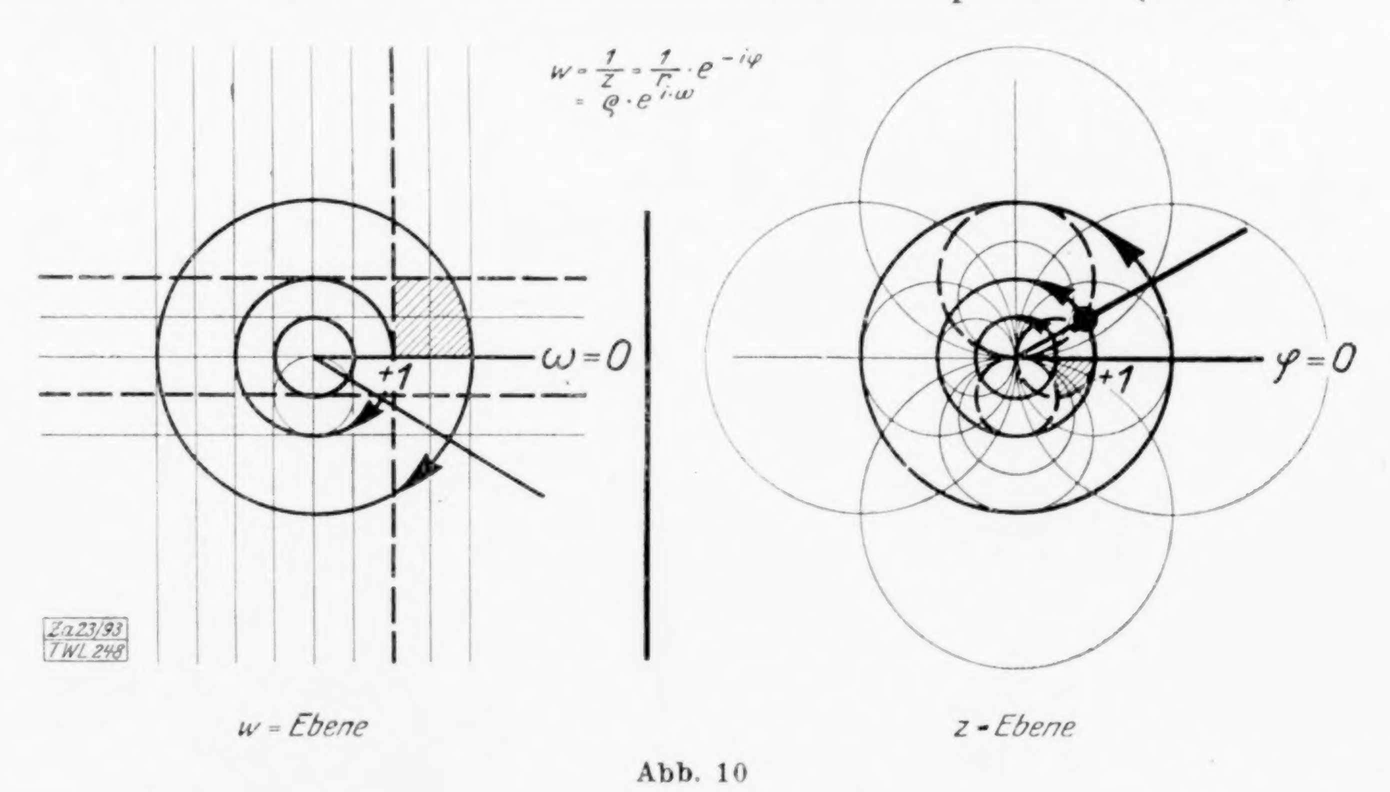


Abb. 10

Die Exponential-Funktion $w = e^z = e^x\, e^{iy} = \varrho\, e^{i\omega}$ stellt eine Abbildung dar, bei der allen Punkten der z-Ebene, die das gleiche x besitzen, d. h. allen Parallelen zur y-Achse, Kreise in der w-Ebene mit dem Radius $\varrho = e^x$ entsprechen. Die z-Ebene wird durch die y-Achse, $x = 0$, in 2 Teile geteilt, denen in der w-Ebene die Teilung dieser Ebene durch den Einheitskreis $\varrho = e^0 = 1$ entspricht. Die linke Hälfte der z-Ebene entspricht dem Inneren, die rechte Hälfte dem Aeußeren des Kreises.

Ferner entspricht den Punkten der z-Ebene, die dasselbe y besitzen, d. h. den Parallelen zur x-Achse, in der w-Ebene ein Strahl vom Nullpunkt unter der Amplitude $\omega = y$. Der Achse selbst ($y = 0$) entspricht z. B. die positive reelle Achse der w-Ebene,

der Parallelen im Abstande $\pm \pi$ zur Achse die negativ reelle Achse der w-Ebene, einer Parallelen im Abstande $2 k \pi$ zur x-Achse wiederum die positiv reelle Achse der w-Ebene. Mit anderen Worten: die Verschiebung der Parallelen in der z-Ebene zur x-Achse um den Betrag 2π führt auf denselben Strahl in der w-Ebene, d. h. durch das Hinzufügen von $2 k \pi i$ zur Zahl z in der Funktion e^z erhält man denselben Betrag für e^z, oder die Funktion e^z besitzt die rein imaginäre Periode $2 \pi i$. Der Parallelstreifen in der z-Ebene zwischen der x-Achse und der Geraden $y = 2 \pi$ entspricht der gesamten w-Ebene (Periodenstreifen) und ist zugleich Fundamentalbereich, d. h. für die Punkte dieses Bereiches ergeben sich sämtliche Werte von w, jeder nur einmal. (Abb. 11.)

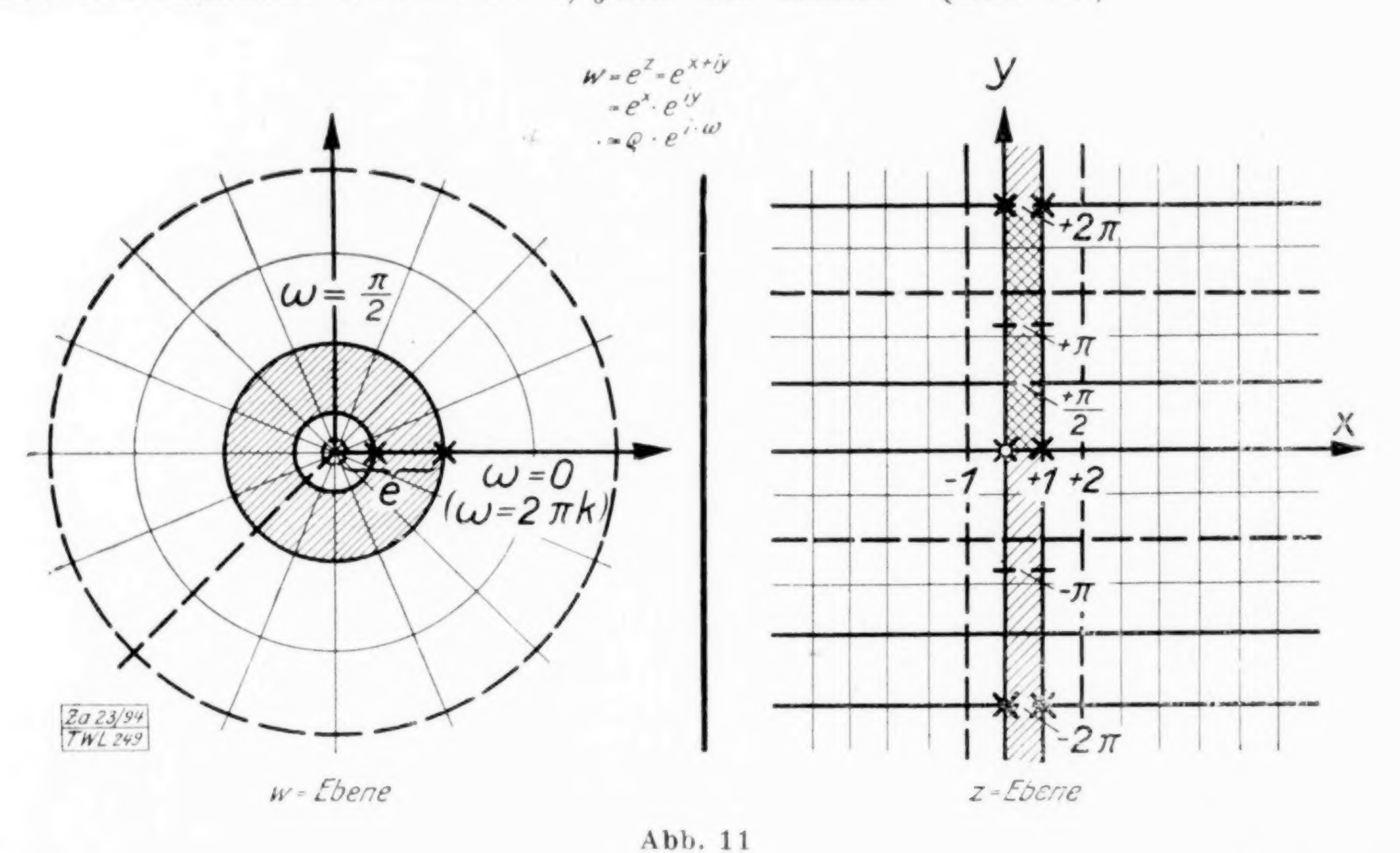


Abb. 11

Dem System der rechtwinklig sich schneidenden Koordinaten der z-Ebene entspricht also das System konzentrischer Kreise mit senkrecht durchsetzenden Radialstrahlen der w-Ebene.

Die inverse Funktion $z = \ln w$ ist unendlich vieldeutig, da einem Punkte w unendlich viele Werte z entsprechen, die sich um $2 k \pi i$ unterscheiden.

Unter dem Hauptwert versteht man $\ln w = \ln \varrho + i \omega$, zu dem beliebige Vielfache von $2 \pi i$ hinzutreten können.

Beispiele: Merkatorprojektion der Geographie, Strömungsfeld für eine Quelle im Nullpunkt mit radialen Stromlinien und konzentrischen Kreisen als Potentiallinien.

Anmerkung: Die konforme Abbildung wird mit Vorteil zur Untersuchung von Vektorfeldern herangezogen, die zwei Systeme sich orthogonal schneidender Kurven bilden, wie z. B. bei den Strömungs- und Potentiallinien der Hydrodynamik, der Elektrizität des Magnetismus und der Wärmeströmung, den Hauptspannungsrichtungen der Elastizitätstheorie.

Den kartesischen Koordinaten der einen komplexen Ebene entsprechen je nach den Funktionen krummlinige Koordinaten der anderen, die sich rechtwinklig durchsetzen.

Die Abbildung ist ferner eine winkeltreue, d. h. einander entsprechende Kurven schneiden sich in beiden Ebenen unter gleichen Winkeln.

Das Quadrieren einer Zahl z $(w = z^2)$ führt auf das Quadrieren des Radiusvektors und Verdoppeln der Amplitude. Es ergibt sich eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit einem Verzweigungspunkt erster Ordnung im Nullpunkte, insofern der Drehung des Leitstrahles in der z-Ebene um 2π eine Drehung des Leitstrahles in der w-Ebene um 4π entspricht, d. h. eine doppelte Ueberstreichung der w-Ebene.

Aus $w = z^2 = (x^3 - y^2) + i\, 2\, x\, y = u + i\, v$ folgt:

$$u = x^2 - y^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1), \qquad\qquad v = 2\, x\, y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Eine Bewegung des Punktes z in der z-Ebene unter der Bedingung $x^2 - y^2 = \text{konst.}$ heißt Bewegung auf einer gleichseitigen Hyperbel, und zwar für den Fall, daß die Konstante negativ ist, auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Achse die reelle x-Achse ist,

für den Fall einer positiven Konstanten auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Achse die imaginäre y-Achse ist; d. h. den Parallelen in der w-Ebene zur V-Achse ($u =$ konst.) entsprechen zwei Scharen von gleichseitigen Hyperbeln, speziell der V-Achse selbst die beiden Winkelhalbierenden der Quadranten der z-Ebene (Abb. 12).

Bewegt z sich in der z-Ebene dergestalt, daß der Ausdruck $2\,xy$ eine Konstante ist, d. h. auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Achsen sind, so entsprechen diese Hyperbeln der z-Ebene Parallelen zur u-Achse in der w-Ebene, und zwar für negatives v die gleichseitigen Hyperbeln des 2. und 4. Quadranten, für positives v die des 1. und 3. Quadranten, speziell für $v = 0$ die Achsen selbst (Abb. 12).

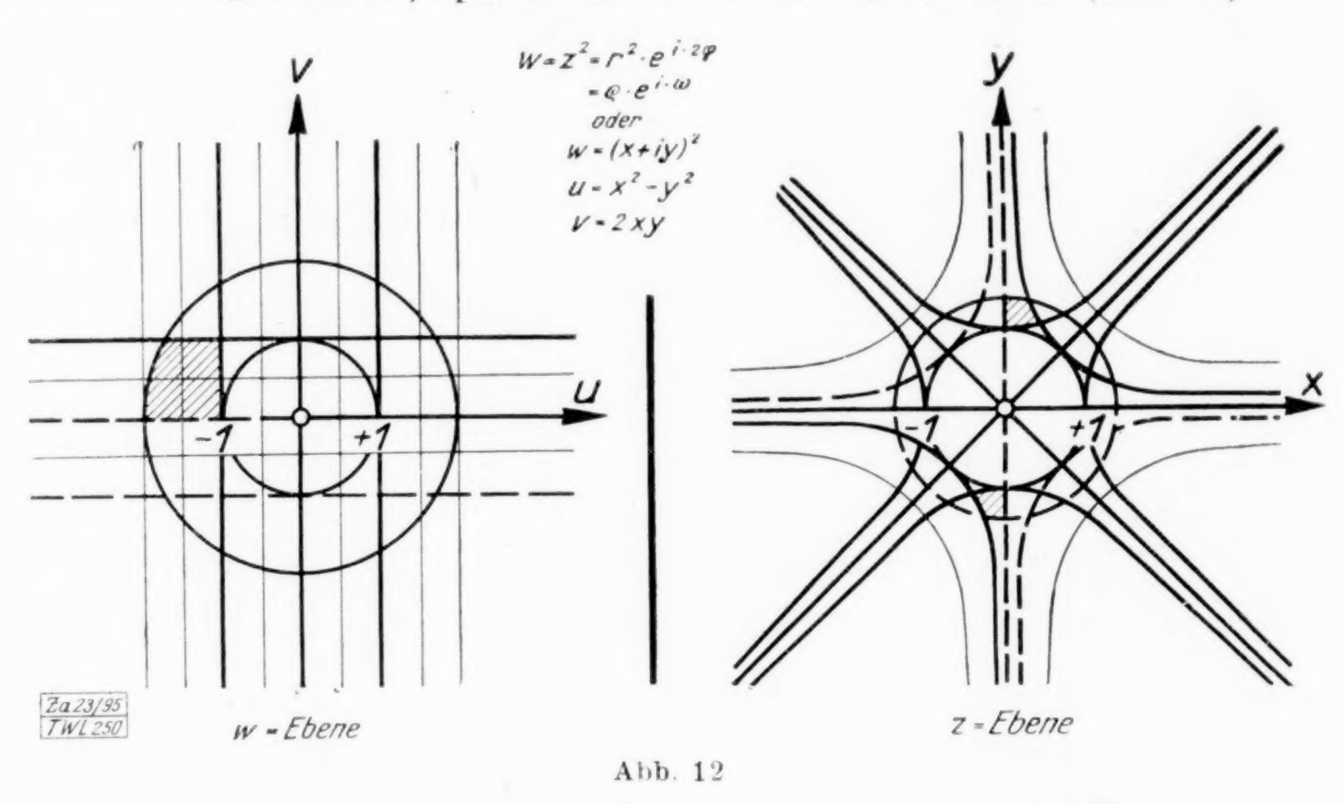


Abb. 12

Einer Bewegung eines Punktes z auf einem Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene mit dem Radius r entspricht eine Bewegung eines w-Punktes der w-Ebene auf einem Kreise um den Nullpunkt der w-Ebene mit dem Radius r^2, den der Punkt w, verglichen mit z, mit doppelter Winkelgeschwindigkeit durchläuft (Abb. 12).

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt durch Elimination von x bezw. y:

$$v^2 = 4\,y^2\,(u + y^2) \quad . \quad . \quad . \quad (3), \qquad\qquad v^2 = -\,4\,x^2\,(u - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Bewegt man sich in der z-Ebene dergestalt, daß y eine Konstante ist (Gleichung 3), d. h. auf einer Parallelen zur x-Achse, so entspricht dieser Parallelen der z-Ebene eine Parabel der w-Ebene, die in Richtung der positiven u-Achse offen ist und deren Brenn-

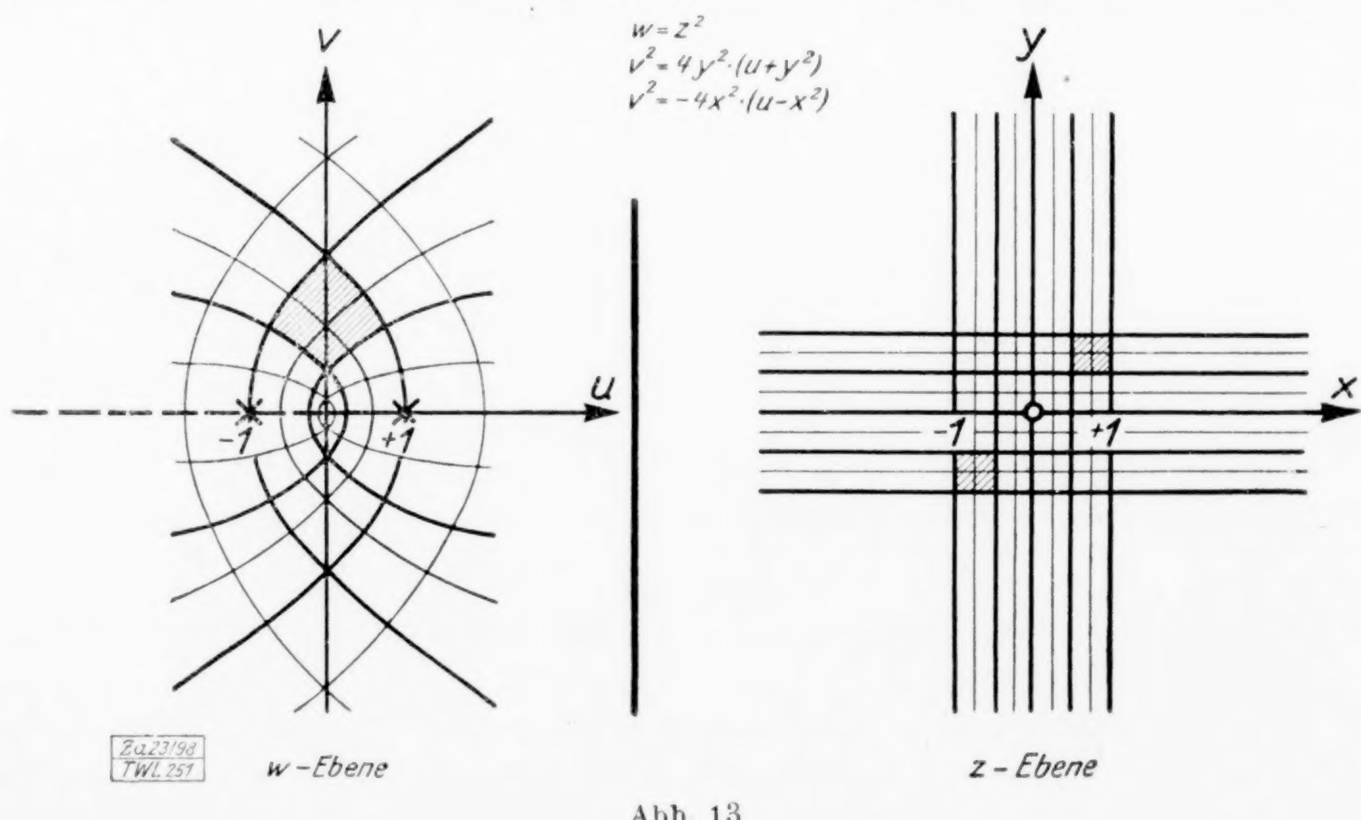


Abb. 13

punkt der Nullpunkt ist (Abb. 13). Ebenso entspricht einer Parallelen zur y-Achse der z-Ebene ($x =$ konst.) eine Parabel der w-Ebene, die nach links offen ist (Gleichung 4); mit anderen Worten: dem geradlinigen Netz der rechtwinkligen Koordinaten der z-Ebene entspricht ein System von zwei Büscheln konfokaler Parabeln, die sich ebenfalls unter rechten Winkeln durchsetzen. Brennpunkt dieser Parabeln ist der Nullpunkt der w-Ebene.

Die Funktion $w = \sin z = \sin(x + i\,y) = \sin x \cos(i\,y) + \cos x \sin(i\,y)$ ergibt, wenn man $\cos(i\,y)$ und $\sin(i\,y)$ durch die Reihenentwicklungen ersetzt, $w = u + i\,v =$

$$\sin x\left(1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) + i\cos x\left(y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \ldots\right).$$

Trennung des reellen und imginären Teiles ergibt:

$$u = \sin x \cos(i\,y), \qquad v = \cos x\,\frac{\sin(iy)}{i}.$$

Durch Benutzung der Gleichungen:

$$\cos^2(i\,y) - \frac{\sin^2(i\,y)}{i^2} = \cos^2(i\,y) + \sin^2(i\,y) = +1 \text{ bezw. } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

erhält man die Beziehungen

$$1.\quad \left(\frac{u}{\sin x}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos x}\right)^2 = 1, \qquad\qquad 2.\quad \left(\frac{u}{\cos(iy)}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sin(iy)}\right)^2 = 1.$$

Läuft der Punkt z auf einer Parallelen zur y-Achse, d. h. ist x eine Konstante, so bewegt sich zufolge Gleichung (1) w auf einer Hyperbel mit den Halbachsen $\sin x$ und $\cos x$, d. h. mit den Brennpunkten ± 1. Ebenso entsprechen nach Gleichung (2) den Parallelen zur x-Achse Ellipsen mit den Halbachsen $\cos(i\,y)$ und $\frac{\sin i\,x}{i}$, d. h. ebenfalls mit den Brennpunkten ± 1. Den rechtwinklig sich schneidenden Koordinatenlinien der z-Ebene entsprechen also die rechtwinklig sich schneidenden konfokalen Kegelschnitte der w-Ebene mit den Brennpunkten 1 (Abb. 14).

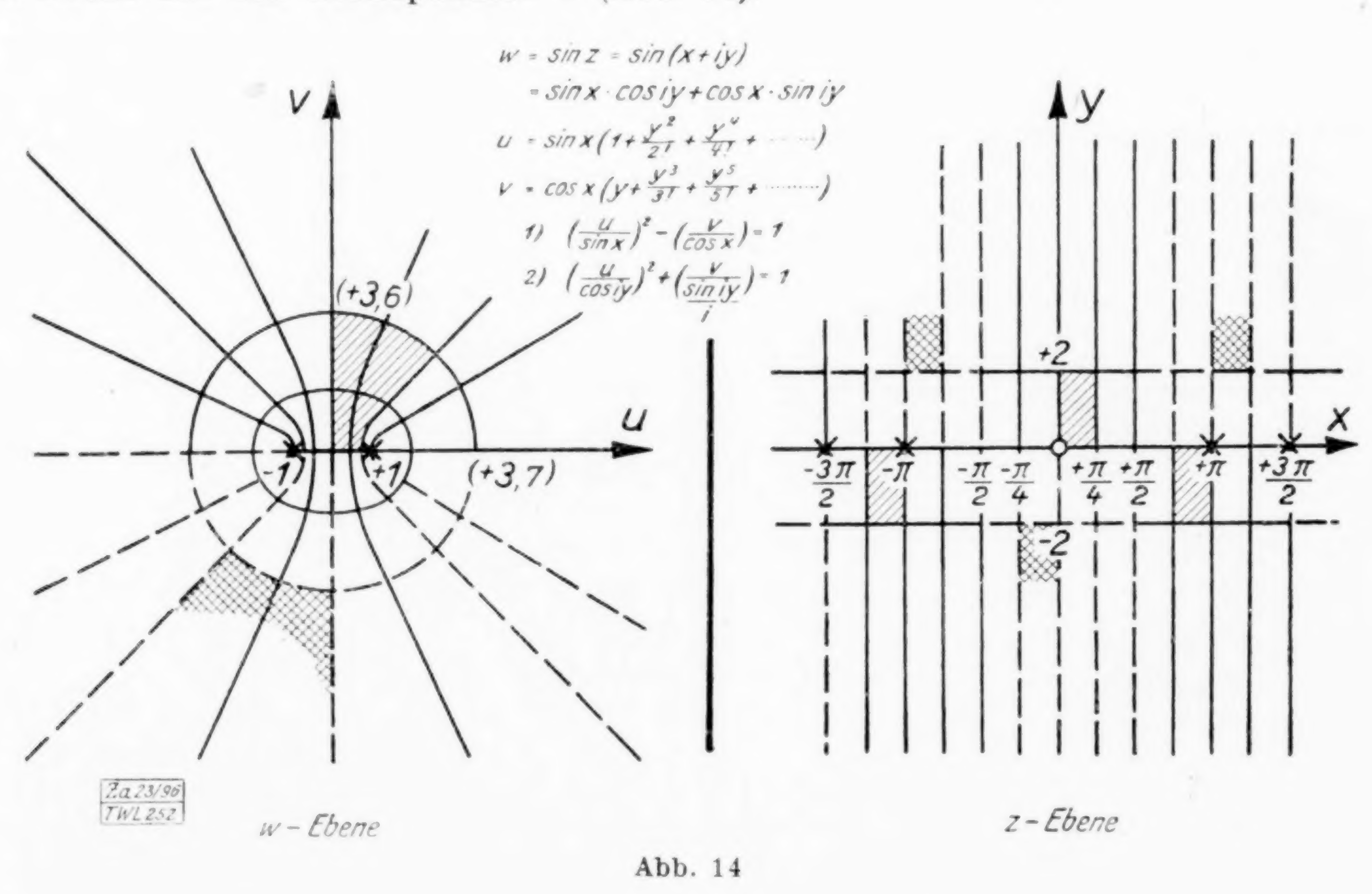


Abb. 14

Eine Vermehrung der Zahl z um $2\,\pi$ ergibt denselben Wert für w, d. h. $\sin z$ besitzt die Periode $2\,\pi$. Ein Periodenstreifen ist ein Parallel-Streifen, parallel zur y Achse von der Breite $2\,\pi$, z. B. der Streifen $x = \pm\,\pi$. Der Streifen $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = +\frac{\pi}{2}$ ist hier jedoch Fundamentalbereich, da sich bereits innerhalb dieses Streifens jeder Wert von w einmal ergibt (Abb. 11).

3. Weitere Beispiele. Die Abbildung $w = \ln(z^2 - 1)$ bewirkt, daß den Parallelen der w-Ebene zur v-Achse Lemniskaten der z-Ebene mit den Brennpunkten $x = \pm 1$ entsprechen und den Parallelen zur u-Achse gleichseitige Hyperbeln der z-Ebene, welche

durch die Punkte $x = \pm 1$ gehen. (Abbildung der rechtwinkligen Koordinaten durch die rechtwinklig sich schneidenden Lemniskaten und Hyperbeln.) $w = \ln (z^2 - 1)$ oder $\ln (z - 1)(z + 1) = \ln (r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2})$, wenn man $(z - 1) = r_1 e^{i\varphi_1}$ setzt (r_1 ist der Radiusvektor nach der Zahl $(z - 1)$, φ_1 seine Amplitude) und entsprechend $(z + 1) = r_2 e^{i\varphi_2}$. Also ist $w = \ln (r_1 r_2) + i (\varphi_1 + \varphi_2) = u + i v$.

Daraus folgt: 1. $u = \ln (r_1 r_2)$, 2. $v = \varphi_1 + \varphi_2$.

Die Radienvektoren von 0 nach $(z - 1)$ und $(z + 1)$ sind gleich denen von $+1$ und -1 nach z, d. h. also, wenn $r_1 r_2 =$ konst. ist, wenn z auf einer Lemniskate läuft, so läuft u auf einer Geraden $u =$ konst. Speziell entspricht dem Wert $r_1 r_2 = 1$, der Lemniskate von Bernoulli der z-Ebene, die v-Achse der w-Ebene.

Für $\varphi_1 + \varphi_2 =$ konst. erhält man gleichseitige Hyperbeln der z-Ebene, z. B. ist $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ für die positive reelle Achse vom Punkt $+1$ bis $+\infty$ und dieser entspricht die Gerade $v = 0$, d. h. die u-Achse.

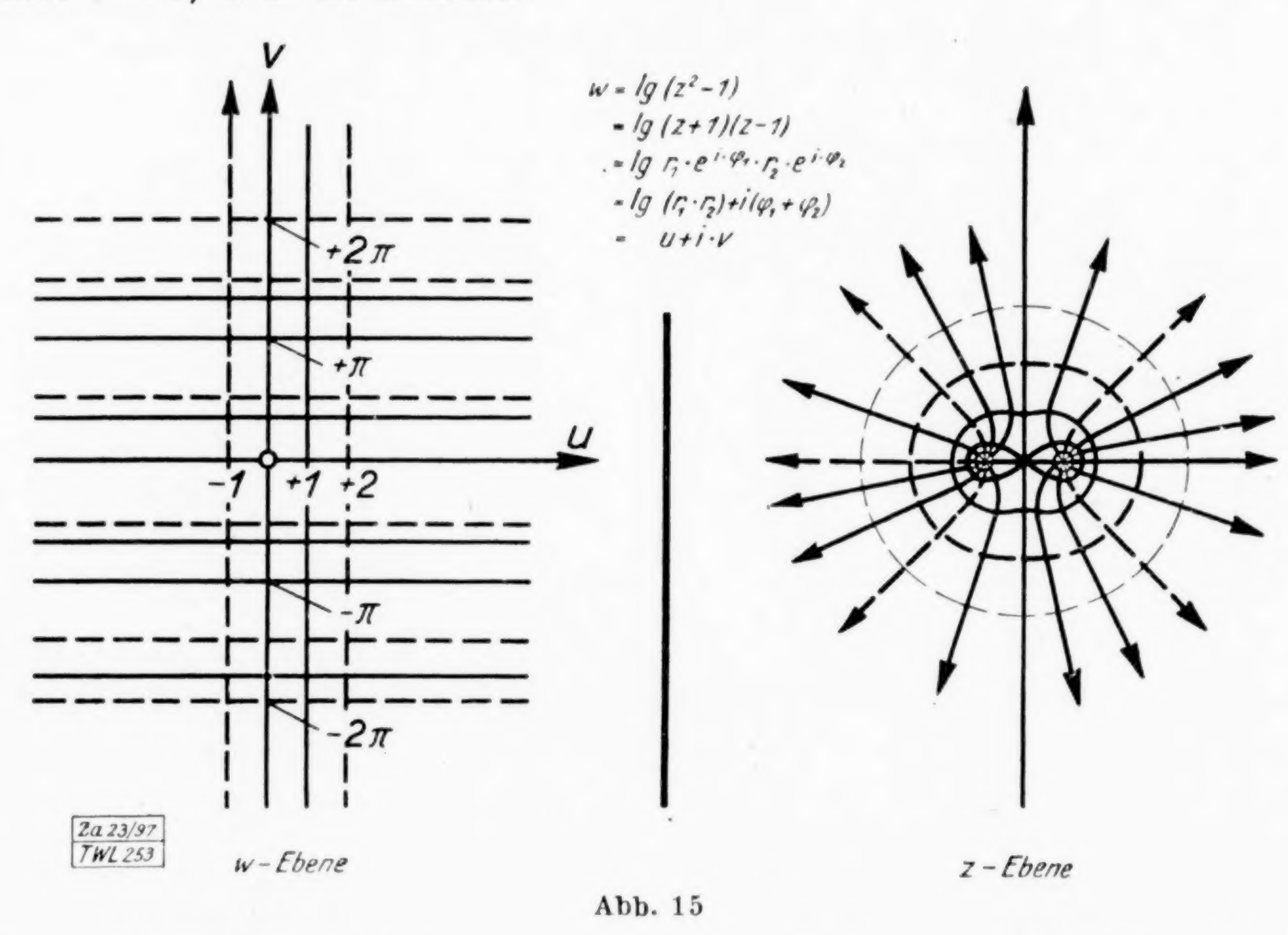


Abb. 15

Das rechtwinklige Koordinatensystem der w-Ebene entspricht also dem Kurvensystem: Lemniskaten mit den Brennpunkten $z = \pm 1$ und gleichseitigen Hyperbeln durch diese Brennpunkte (Abb. 15).

Die Funktion $w = \ln \frac{z-1}{z+1} = \ln \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}}$ ergibt als reellen bezw. imaginären Bestandteil von $w = u + i v$

$$u = \ln \frac{r_1}{r_2} \qquad v = \varphi_1 - \varphi_2,$$

wenn unter r_1 bezw. r_2 die Entfernung eines Punktes der z-Ebene von den Punkten $+1$, -1 und unter φ_1 bezw. φ_2 die Richtungswinkel der Leitstrahlen von diesem Punkt z nach den Punkten $+1$ bezw. -1 verstanden werden.

$u =$ konst. bedeutet also: $\frac{r_1}{r_2} =$ konst.

Die Bedingung $\frac{r_1}{r_2} =$ konst. erfüllen in der z-Ebene alle Punkte auf apollonischen Kreisen, die die Strecke -1 bis $+1$ im Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ harmonisch teilen. Insbesondere ist $\frac{r_1}{r_2} = 0$ für den Punkt $+1$. Die Kreise wachsen aus dem Punkt $+1$ heraus, während ihr Mittelpunkt nach $+\infty$ rückt und gehen in die y-Achse (Kreis mit unendlich großem Radius — (Mittelpunkt im Unendlichen) über, erscheinen auf der negativen reellen Achse aus dem negativen Unendlichen wieder, um im Punkte -1 für $\frac{r_1}{r_2} = \infty$ zu verschwinden.

Diesen Kreisen entsprechen die Parallelen in der w-Ebene zur v-Achse im Abstande $u = \ln \frac{r_1}{r_2}$.

Dem Punkte $+1$ entspricht die Gerade $u = -\infty \left[\frac{r_1}{r_2} = 0\right]$.

Der y-Achse entspricht die Gerade $u = 0 \left[\frac{r_1}{r_2} = 1\right]$.

Dem Punkte -1 entspricht die Gerade $u = +\infty \left[\frac{r_1}{r_2} = +\infty\right]$.

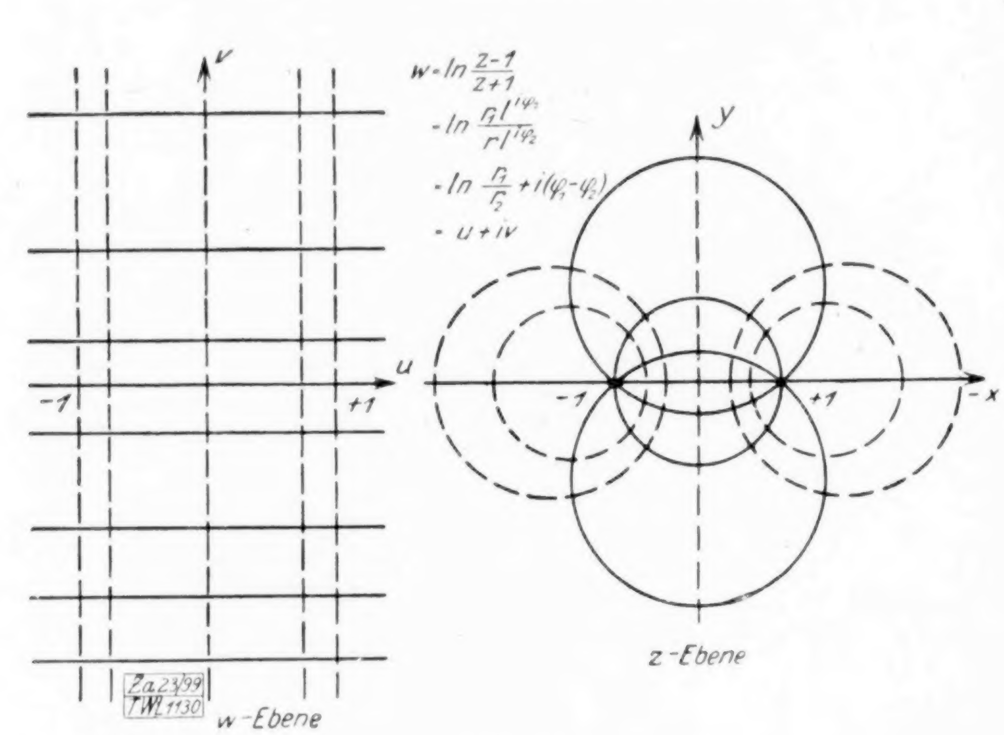


Abb. 16

Die Bedingung $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{konst.}$ wird von Punkten der z-Ebene erfüllt, die auf Kreisbögen über der Strecke $-1 + 1$ stehen und den Winkel $(\varphi_1 - \varphi_2)$ als Peripheriewinkel fassen. Diese Kreisbögen entsprechen also Parallelen zur u-Achse im Abstande v.

Dabei ist die Strecke $-1 + 1$ als Kreisbogen mit unendlich großem Radius aufzufassen (Periepheriewinkel $= +\pi$). Dieser Strecke entspricht also die Parallele in der w-Ebene zur u-Achse im Abstande $v = +\pi$. Der reellen Achse außerhalb $-1 + 1$, die als Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel 0 aufzufassen ist, entspricht die u-Achse, $v = 0$. (Abb. 16.)

Die Funktion $w = \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + iy) = u + iv$ ergibt:

$$1.\quad (u + \operatorname{cotg} 2x)^2 + v^2 - \frac{1}{\sin^2 2x} = 0, \qquad 2.\quad u^2 + (v - \operatorname{Cotg} 2y)^2 - \frac{1}{\operatorname{Sin} 2y} = 0,$$

d. h. den Parallelen zur y-Achse (x=konst.) der z-Ebene entsprechen Kreise durch die Punkte $\pm i$ der w-Ebene, deren Mittelpunkte auf der u-Achse, liegen in der Entfernung $\operatorname{cotg} 2x$ mit dem Radius $\frac{1}{\sin 2x}$, und den Parallelen zur x-Achse (y=konst.) der z-Ebene entsprechen Kreise, deren Mittelpunkte auf der v-Achse in der Entfernung $\operatorname{Cotg} 2y$ liegen mit dem Radius $\frac{1}{\operatorname{Sin} 2y}$.

Beide Funktionen $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$ und $w = \operatorname{tg} z$ führen zur gleichen Abbildung, wie sich auch aus folgender Betrachtung ergibt:

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}$$

oder $e^{2zi} = \frac{1 + iw}{1 - iw}$, d. h. $-2iz = \ln \frac{iw - 1}{iw + 1} + \ln(-1)$, $\quad -2iz + \pi = \ln \frac{iw - 1}{iw + 1}$.

Setzt man

$w' = -2iz + \pi$ (Dehnung, Drehung und Parallelverschiebung) (Abb. 8 u. 9),
$Z' = iw$ (Drehung) (Abb. 9),

so erhält man die obige Form $w' = \ln \frac{z' - 1}{z' + 1}$.

Anwendung: Spannungslinien in einer Platte mit 2 Nietlöchern, elektrisches Feld zweier unendlich langer geradliniger Stromleiter, die von gleichen Stromstärken in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden und in den Punkten ± 1 die Ebene senkrecht durchsetzen.

In der Funktion $w = z + \frac{1}{z} = (x + iy) + \frac{1}{x + iy} = u + iv$ ergeben sich der reelle und imaginäre Bestandteil, von w als

$$u = x\left(\frac{1}{x^2 + y^2} + 1\right),\quad v = y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right),\ \text{Kurven dritter Ordnung.}$$

Den Kurven $u =$ konst., d. h. den Parallelen zur v-Achse entsprechen Kurven der z-Ebene, die symmetrisch zur x-Achse liegen. Insbesondere entspricht dem Werte $u = 0$ die x-Achse.

Den Kurven $v =$ konst., d. h. den Parallelen zur u-Achse entsprechen Kurven der z-Ebene, die symmetrisch zur y-Achse verlaufen. Insbesondere entspricht dem Werte $v = 0$ die x-Achse und der Einheitskreis. (Abb. 17.)

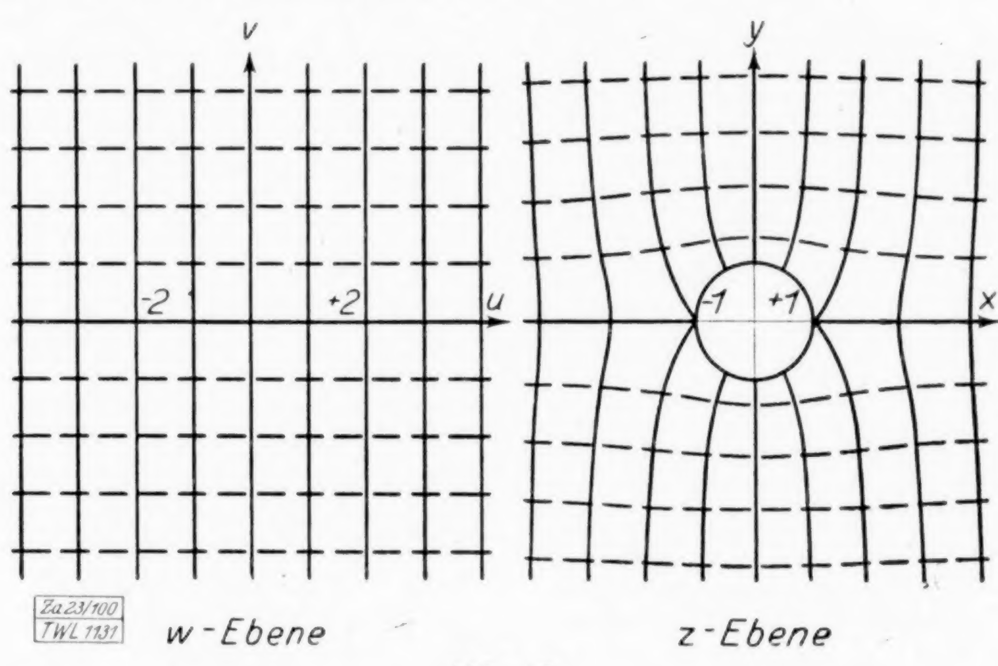


Abb. 17

Die Rolle, die der Einheitskreis der z-Ebene spielt, wird deutlicher, wenn man die Form $\left(z + \frac{1}{z}\right)$ umschreibt in die Form

$$r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Dann wird $u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\ v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$

Die letzten Gleichungen sind die Darstellung einer Ellipse in Parameterform. Die Halbachsen sind $r + \frac{1}{r}$ bezw. $r - \frac{1}{r}$. Die Brennpunkte sind $u = \pm 2$. Es entspricht den Kreisen der z-Ebene mit dem Radius r bezw. mit dem Radius $\frac{1}{r}$ dieselbe Ellipse mit obigen Halbachsen. Für $r = 1$ erhält man $u = 2\cos\varphi$, $v = 0$, d. h. der Einheitskreis der z-Ebene entspricht dem reellen Teil der w-Ebene von -2 bis $+2$. Für $\varphi = 0$ (d. h. die reelle positive x-Achse) erhält man $u = r + \frac{1}{r}$, $v = 0$, also die u-Achse von $+2$ bis $+\infty$, die für die Werte $r = 0$ bis 1 und 1 bis $+\infty$, von $+\infty$ bis $+2$ und zurück von $+2$ bis $+\infty$ durchlaufen wird. Entsprechend erhält man für $\varphi = \pi$ die negativen Achsenbeziehungen.

Für $\varphi =$ konst. erhält man durch Elimination von r die Beziehung $\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} - 4 = 0$, also Hyperbeln, deren Brennpunkte bei $u = \pm 2$ liegen. Die Halbstrahlen der z-Ebene entsprechen demnach Hyperbeln, die konfokal zu den obigen Ellipsen sind. Es wird also eine Abbildung vermittelt, die Kreise mit Radien überführt in konfokale Kegelschnitte (Abb. 11, 14).

Sowohl das Innere wie das Aeußere des Einheitskreises der z-Ebene wird auf die ganze w-Ebene abgebildet.

Anwendung: Beschränkt man sich auf die Abbildung des Aeußeren des Einheitskreises, so erhält man die Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit um einen eingetauchten Kreiszylinder, indem die Kurven $v =$ konst. Strömungslinien, $u =$ konst. Niveaulinien sind.

KURZE AUSZÜGE

Hydromechanik und Hydraulik.

Versuche mit Staurohren. Die vielseitige Verwendung von Staurohren in der Technik ruft das Bedürfnis hervor, diese Instrumente für besondere Zwecke zu normalisieren, bezw. so auszubilden, daß sie leicht reduzierbar sind, und daß die Eichung des Originalrohres ohne weiteres auf die gleiche Ausführung übertragbar ist. Anders kann man die Schwierigkeit besonderer Eichung, die umfangreiche Versuchsanlagen erfordert, nicht umgehen. Der V. d. I. hat daher auf Anregung des Unterausschusses für Ventilatoren im Prandtlschen Institut zu Göttingen eine Reihe von Rohren eingehend untersuchen lassen. Die Versuche sind von H. Kumbruch durchgeführt und in den Forschungsheften des V. d. I. (Heft 240, 32 S.) veröffentlicht worden. Ein gutes Staurohr muß folgende Eigenschaften haben: Der Beiwert des Gerätes soll möglichst genau gleich 1 sein, damit es neben der Geschwindigkeitshöhe auch den statischen Druck richtig angibt, es soll in möglichst weitem Bereich unempfindlich gegen Schrägstellung zur Stromrichtung sein; die Anzeige soll vom Turbulenzgrad der Strömung nicht abhängen; außerdem soll die geometrische Form des Gerätes leicht reproduzierbar und gegen Beschädigungen unempfindlich sein. Untersucht wurden zwei Formen von Prandtl, ein von Brabbée und eine von Rosenmüller; sie genügen alle den Forderungen sehr gut, das neue Prandtlsche Rohr ist den anderen durch größere Unempfindlichkeit gegen Schrägstellung überlegen. Interessant sind auch die mitgeteilten Versuche über besondere Staurohrausführungen zur Messung bei verunreinigter und feuchter Luft und zur Verwendung als Komponentengerät. Auch Versuche an Stauscheiben hat Kumbruch angestellt, doch findet er sie wegen ihres schwankenden Beiwert den Staurohren nicht ebenbürtig.

Scheinbare Unstimmigkeiten im Widerstandsgesetz. Die Strömung in glatten Rohren kann heute auf Grund vieler Versuchsreihen, die miteinander in bester Uebereinstimmung stehen, als experimentell genau bekannt angesehen werden. Die laminare Strömung bei kleinen reduzierten Geschwindigkeiten (Reynoldsschen Kennzahlen) wird vom Poiseuilleschen Gesetz beherrscht, für die turbulente Strömung bei großen Kennzahlen gilt in sehr guter Näherung eine zuerst von Blasius aufgestellte empirische Formel, wonach der Druckabfall proportional der $^7/_4$ten Potenz der Geschwindigkeit wächst. Diesen einfachen Gesetzmäßigkeiten scheinen Messungen von Sorkau zu wiedrsprechen, in denen mehr als eine Uebergansstelle auftrat und aus welchen also das Vorhandensein mehrerer Arten von turbulenter Strömung zu folgen schien. Nun zeigen Schiller und Kirsten (Phys. Zeitschr. 27, 1921, S. 523 bis 528), daß diese Anomalien auf die Kürze der von Sorkau benutzten Rohrstrecken zurückzuführen sind. Bei kurzen Rohrstücken spielt nämlich der Ein- und Auslauf eine erhebliche Rolle, die sich auf Grund der Prandtlschen Grenzschichtentheorie berechnen läßt (wie Schiller und Latzko in dieser Zeitschrift gezeigt haben). Die einströmende Flüssigkeit wird erst nach und nach von der Reibung, die von der Wand ausgeht, erfaßt und zwar kann bei größeren Reynoldsschen Zahlen, die Strecke auf der sich die laminare Strömung entwickelt, bedeutende Werte annehmen. Dies ist bei den Sorkauschen Messungen, bei welchen die kritische Kennzahl wegen des glatten Einlaufs sehr hoch liegen muß (3500 bis 4000), der Fall[1]).

Die sichere Gültigkeit der Blasiusschen Näherungsformel für die **Strömung in glatten Rohren** veranlaßt M. Jakob (Z. V. d. I. 66 1922, S. 178 bis 182) zu dem Vorschlage, den Druckabfall in einem solchen Rohr zur Messung großer Gasmengen zu benutzen. Die bisherigen Meßmethoden erfordern Eichungen an Gasbehältern, welche nur geringe Genauigkeit haben und keine allzugroße Ausdehnung der Dimensionen gestatten. Das Reynoldssche Aehnlichkeitsgesetz gestattet die Anwendung der Methode auf Gase und Flüssigkeiten und die Uebertragung einer Eichung mit Wasser auf Luftströmungen. Versuche, die in der Physikalisch-technischen Reichsanstalt ausgeführt wurden und sich auf Reynoldssche Kennzahlen Geschwindigkeit mal Durchmesser zu kinematischen Zähigkeitskoeffizienten) bis etwa 80000 erstreckten, bestätigten Aehnlichkeitsgesetz und Blasiussche Formel sehr genau.

Die **Geschwindigkeitsverteilung in konischen Saugrohren** ist wegen ihres Zusammenhanges mit dem Wirkungsgrad der Saugrohre von besonderem Interesse. G. E. Lyon hat (Mechan. Engineering, March 1922, S. 177 bis 180) sechs konische Röhren mit Oeffnungswinkeln von 6 bis 12°, mit einer Erweiterung von 7,5 cm auf 15 cm und auf 21,5 cm Dmr. und mit Längen von 35 bis 100 cm untersucht. Vor der Erweiterung waren Stücke konstantem Querschnittes von 10 bis 50 cm Länge angebracht. Die Geschwindigkeit wurde zu Beginn der Erweiterung und in drei anderen Querschnitten mittels Pitotröhren an je 12 Stellen gemessen. Die Ergebnisse lassen sehr gut erkennen, wie die Geschwindigkeit beim Eintritt ungefähr gleichmäßig verteilt

[1]) Vgl. a. weiter unten »Widerstand in Kapillarrohren«.

ist und stromabwärts je nach der Form mehr oder weniger schnell von der Mitte aus nach den Seiten abfällt. Eine unsymmetrische Verteilung wurde nicht gefunden. Der Wirkungsgrad wird aus den Geschwindigkeitsverteilungen ausgerechnet, aber allgemeine Schlüsse werden nicht gezogen.

Eine neue Turbinenbauart. Die Moody-Ejektor-Turbine ist zu dem Zweck gebaut, um bei Niederdruckwasserkräften Hochwasser, durch welches ein kleineres Gefälle zwischen Ober- und Unterwasser entsteht, besser ausnutzen zu können. Um dies zu erreichen, wird durch eine, Ejektor genannte, regulierbare Oeffnung ein Teil des überschüssigen Wassers direkt in das Saugrohr geleitet, wodurch die Saugwirkung verstärkt wird. Eine solche Turbine unterwarf S. Logann Kerr (Mechanical Engineering April 1922, Bd. 44, S. 243 bis 247) einer ausführlichen Untersuchung. Es wird gezeigt, wie durch Oeffnung des Ejektors zwar der Wirkungsgrad herabgesetzt wird, aber doch größere Leistungen erzielt werden können. (Die Herabsetzung des Wirkungsgrades bei Hochwasser ist belanglos, da ja mehr Wasser vorhanden ist, als verbraucht werden kann.) Auch der Verlauf der Geschwindigkeit im Saugrohr ist dabei ausführlich gemessen worden. Zu diesem Zweck wurde ein Meßinstrument konstruiert, das aus zwei um 180° gegeneinander versetzten Pitotröhren besteht, die auf zwei Schenkel eines Manometers wirken. Das Instrument wird an dem Meßpunkt in eine Stellung gedreht, in welcher es Null zeigt; daraus wird auf die Richtung der Geschwindigkeit geschlossen; die Größe der Geschwindigkeit wird dann durch Verdrehen des Instrumentes um 90° bestimmt.

Hopf. 258

Stabilität der Laminarbewegung zwischen rotierenden Zylindern. In einer bedeutsamen Arbeit, die geeignet ist, auf das Problem der Turbulenz neues Licht zu werfen, behandelt G. J. Taylor analytisch und experimentell die laminare Bewegung des Wassers zwischen zwei konachsialen Zylindern, die mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten rotieren (Philos. Transactions Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 223, S. 289 bis 343, 1923). Für den stationären Zustand liefern die hydrodynamischen Grundgleichungen eine gleichförmige Kreisbewegung aller Teilchen, deren Geschwindigkeit V von dem Achsabstand r in der Form $V = Ar + B/r$ abhängt, wobei die Konstanten A und B sich aus den Bedingungen des Haftens $V = r_1 \omega_1$ bezw. $r_2 \omega_2$ für $r = r_1$ und $r = r_2$ rechnen. Taylor setzt nun eine achsialsymmetrische Störungsbewegung, die exponentiell mit der Zeit t, periodisch in der Richtung (z) der Zylinder-Erzeugenden variiert, in der üblichen Form an:

$$u = u_1 \cos \lambda z e^{\sigma t}, \qquad v = v_1 \cos \lambda z e^{\sigma t},$$
$$w = w_1 \sin \lambda z e^{\sigma} ,$$

vernachlässigt die Glieder höherer Ordnung in u_1, v_1, w_1 und erhält damit für diese drei Größen, die nur von r abhängen, drei homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. In die Gleichungen und Randbedingungen (Verschwinden von u_1, v_1, w_1 für $r = r_1$ und $r = r_2$) gehen außer den Parametern λ und σ, die Zähigkeitszahl Z und die Konstanten r_1, r_2, ω_1, ω_2 ein. Zwischen diesen 7 Größen besteht eine transzendente Gleichung als die Bedingung für die Existenz einer Lösung des Randwertproblems. Es gelingt Taylor auf Grund einer Darstellung der Integrale als Reihen von Besselschen Funktionen die Gleichung numerisch zu diskutieren und folgende Resultate sicherzustellen: Hält man r_1, r_2, Z und das Geschwindigkeitsverhältnis $\mu = \omega_2 : \omega_1$ fest, so daß nur drei Veränderliche ω_1, λ, σ übrig bleiben, und läßt ω_1 von Null an wachsen, so gibt es einen bestimmten kleinsten Wert von ω_1 und einen dazugehörigen Wert von λ, bei denen σ verschwindet. In der Annahme nun, daß für sehr kleine ω_1 die Strömung sicher stabil ist, also der reelle Bestandteil von σ negativ ist, und daß nach einem Satze von Rayleigh komplexe Werte von σ für die Stabilitäts-Diskussion nicht in Frage kommen, sieht Taylor in dem so berechneten kleinsten ω_1 für verschwindendes σ die Grenze der Stabilität der Laminarbewegung. Die Theorie stimmt jedenfalls ausgezeichnet mit den Beobachtungen überein, die Taylor an drei Paaren von Zylindern durchgeführt hat, von denen der äußere stets den Halbmesser $r = 4{,}035$ cm, der innere einmal 3,00, dann 3,55, schließlich 3.80 cm besaß, während die Länge 90 cm betrug. Die zahlenmäßigen Ergebnisse von Versuch und Rechnung sind in Abb. 1 (vergl. S. 150) — in einer gegenüber der Originalabhandlung etwas abweichenden Form — dargestellt. Dabei sind als Abszissen x und Ordinaten y die folgenden dimensionslosen Größen aufgetragen:

$$x = \frac{r_2^2 \omega_2}{r_1^2 \omega_1} = \frac{r_2}{r_1} \frac{v_2}{v_1} \quad \text{und} \quad y = \frac{\omega_1 - \omega_2}{Z} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}.$$

Denkt man sich r_1 und r_2 ins Unendliche wachsend, so geht y in die auf die Schichtbreite $r_2 - r_1$ reduzierte Geschwindigkeit $(v_1 - v_2)(r_2 - r_1) : Z$ über. Die in der Abbildung gezeichneten Linien entsprechen der Rechnung, die eingetragenen Einzelpunkte den Versuchen. Die vertikale Asymtote $x = 1$ ist die von Rayleigh gefundene Stabilitätsgrenze für Flüssigkeit ohne Zähigkeit. Nicht nur hinsichtlich der Geschwindigkeitswerte, bei denen die »Instabilität« einsetzte, sondern auch in der Form der Störungsbewegung ergab sich volle Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung. In die Flüssigkeit eingeführter Farbstoff ließ eine Wellung erkennen, deren Periode genau dem für verschwindendes σ berechneten λ entsprach. Auch ein charakteristischer Unterschied im Verhalten bei positivem und negativem μ trat genau, wie er von der Theorie verlangt wird, bei den Versuchen zutage.

Das Hauptinteresse wendet sich naturgemäß der Frage zu, was aus diesen Untersuchun-

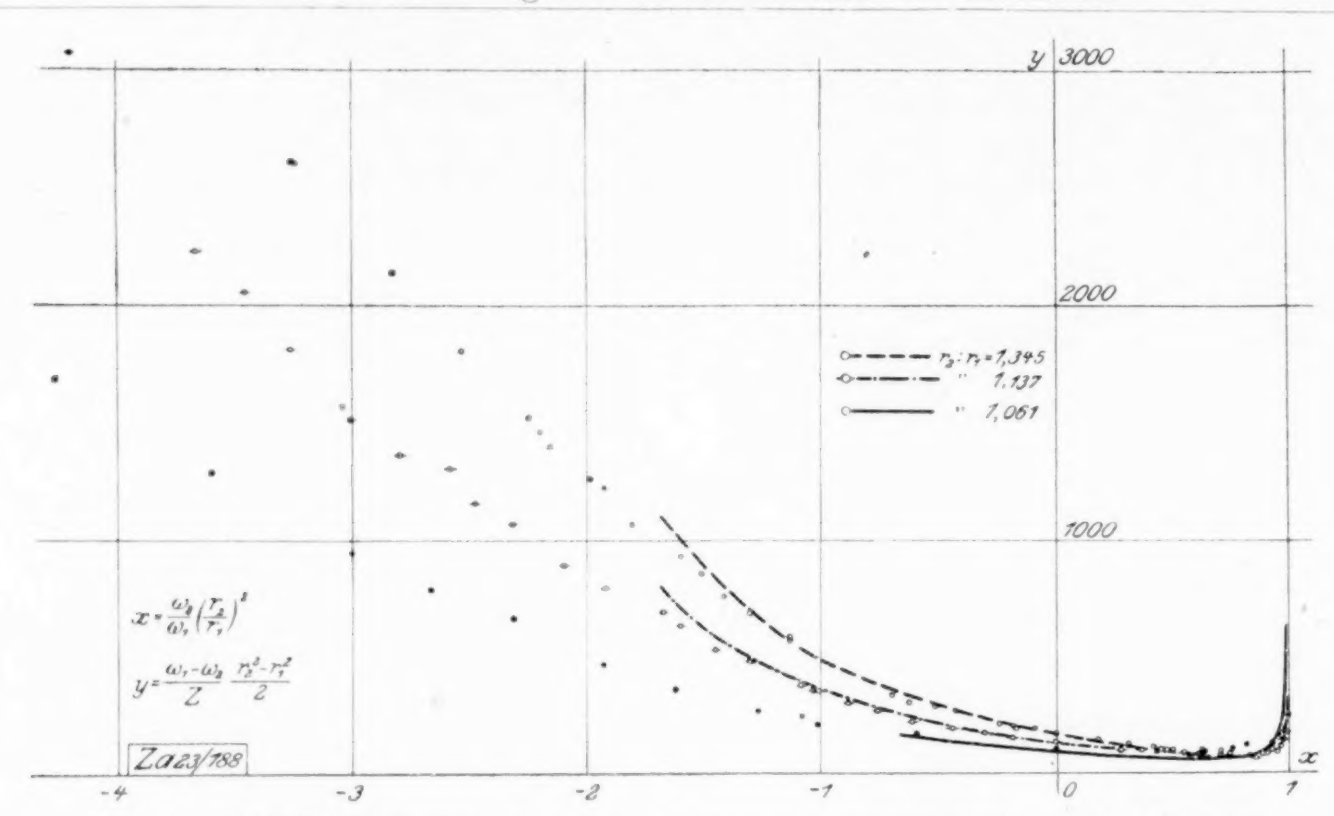


Abb. 1. **Stabilitätsgrenzen laminarer Bewegung zwischen rotierenden Zylindern.**

gen für das Problem der Turbulenz geschlossen werden kann. Bekanntlich hat schon Couette (1890) und später Mallock (1896) die Bewegung zwischen konaxialen Zylindern auf ihren laminaren Charakter hin untersucht. Beide fanden übereinstimmend, daß wenn der innere Zylinder ruht ($\mu = \infty$), der Uebergang zur turbulenten Bewegung ungefähr bei $y = 2000$ erfolgt. Nimmt man an, daß bis zu diesem Werte die Laminarbewegung im Sinne der Theorie der kleinen Schwingungen stabil ist, so müßten die Linien unserer Abbildung, wenn $r_1 : r_2$ gegen 1 geht, sich so verändern, daß sie schließlich eine horizontale Asymptote in der Höhe 2000 erhalten. Für den linken Ast ist das einigermaßen denkbar, rechts steht es in unmittelbarem Widerspruch mit dem Vorhandesein der vertikalen Asymptote, bezw. dem Resultat, daß für $\mu > (r_1 : r_2)^2$ Instabilität überhaupt nicht auftritt. Andererseits ist es sehr unwahrscheinlich, daß bei sehr dünnem Spalt und sehr großen Radien die Störungsbewegung axial symmetrisch bleibt und nicht eine gewisse Periodizität in tangentialer Richtung erhält. Man kann also noch hoffen — wenn man überhaupt von der Theorie der kleinen Schwingungen eine Aufklärung der Turbulenzfrage erwartet —, daß unter Zugrundelegung allgemeinerer Formen der Zusatzbewegung sich eine dem tatsächlichen Eintritt der Turbulenz besser entsprechende Stabilitätsgrenze wird finden lassen. Dann müßte auch die Unsymmetrie verschwinden, die in den Linien unserer Abbildung zu erkennen ist, und die anzeigt, daß es sich hier um eine ausgesprochene Wirkung der Drehbewegung handelt, die den Uebergang zur Bewegung zwischen parallelen Platten nicht ohne weiteres zuläßt. — Wer aber sich vor Augen hält, daß die Turbulenz, wo immer sie beobachtet wurde, keine ausgeprägten Periodizitäten, sondern unregelmäßig veränderliche Pulsationen aufweist, so daß ihr ein statistischer Ansatz weit eher gerecht werden dürfte als die Theorie der kleinen Schwingungen, der wird auch in der Taylorschen Arbeit keinen zwingenden Grund dafür erkennen, sich der Auffassung von der Erklärbarkeit der Turbulenz im Sinne der klassischen Hydromechanik zu nähern.

Strömungswiderstand in Rohren. Aus dem Jahre 1917 stammen Experimental-Untersuchungen von G. De Marchi, die erst jetzt in Deutschland bekannt wurden (Rendiconti delle esperienze e degli studi eseguiti nell'Instituto Irdotecnico di Stra, Venedig, Bd. I, Heft 3 (1917) S. 19 bis 87). Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die entscheidenden Versuche von Reynolds betr. den Uebergang vom laminaren in den turbulenten Zustand, zu wiederholen und nach verschiedenen Richtungen, mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen, zu ergänzen. Insbesondere hat er den Unterschied im Verhalten glatter und rauher Rohre zu erforschen versucht. Seine Ergebnisse, die inzwischen durch manche andere Arbeiten überholt wurden, sind im wesentlichen folgende. Der von Reynolds gefundene kritische Wert 2000 für die auf den Durchmesser reduzierte Geschwindigkeit erscheint zu hoch, wenn man ihn als die Grenze betrachtet, bei der die Poiseuilleschen Gesetze zu gelten aufhören. Schon bei wenig über 1000 verläßt die Widerstandslinie die Poiseuillesche Gerade und zwar sowohl bei glatten als bei rauhen Rohren. (Nach den neueren Untersuchungen von Schiller ist dies auf die Eintrittswiderstände zurückzuführen). Der Uebergang zur eigentlichen turbulenten Widerstandlinie erfolgt früher oder später je nachdem es sich um glatte oder rauhe Rohre handelt, ungefähr aber in der Gegend von 2000. Das Widerstandsgesetz im turbulenten Gebiet entspricht bei glatten Rohren ungefähr dem von Blasius angenommenen Exponenten 7/4, während sich bei rauhen Rohren anscheinend ein Ansteigen des Widerstandes mit höherer als der zweiten Potenz der Geschwindigkeit er-

gibt. Die Versuche wurden mit Rohren angestellt von 0,5 bis 0,7 cm Dmr. bei einer Meßlänge von 50 bis 60 cm.

Widerstand in Kapillarrohren. Sorkau hat vor längerer Zeit aus Versuchsreihen über den Strömungswiderstand in Kapillaren unrichtige Schlüsse gezogen, die inzwischen von verschiedener Seite richtiggestellt worden sind. Cl. Schaefer und G. Heisen haben es unternommen (Zeitschr. f. Phys. 12, 1922, S. 165 bis 176), Versuche in der Sorkauschen Anordnung zu wiederholen, um zur Klarstellung der Verhältnisse beizutragen. Sie experimentierten mit einer Kapillare von 0.066 cm Dmr. bei 15 bis 55° C und verwandten als Flüssigkeit Chloroform mit einer Dichte von 1,486 bis 1,408 und einer Zähigkeit von 0,006029 bis 0,004344. Die Untersuchung der Uebergangsstelle zwischen laminarer Bewegung und einem Gebiet, in dem die Neigung der Widerstandlinie im logarithmischen Diagramm 1,497 betrug, ergab volle Uebereinstimmung mit dem Aehnlichkeitsgesetz. Dieses festzustellen war der Hauptzweck der Versuche.

Daneben suchten die Verfasser auch zu ergründen, ob durch eine Herstellung künstlicher Inhomogenitäten in der Flüssigkeit der Eintritt der Turbulanz gefördert wird. Die Versuche ergaben kein positives Resultat. Die Einführung kleiner Teilchen Hämoglobin, dann von kleinen Bernstein-Suspensionen ergab nicht das Auftreten der Turbulenz, trotzdem die reduzierte Geschwindigkeit über den kritischen Wert hinaus gesteigert wurde.

Strömung hinter einer eingetauchten Platte. Die heutige Hydraulik wird großenteils beherrscht von dem Gedanken, daß — so wenig aufgeklärt dies auch sein mag — die tatsächlichen Formen turbulenter Bewegung in den allgemeinen Umrissen den Gesetzen der idealen Flüssigkeiten folgen. Taucht man eine ebene Platte senkrecht in eine gleichförmige Strömung ein, so entsteht hinter ihr ein Totraum, dessen Begrenzung, wenigstens in der Nähe der Platte, der theoretisch berechneten Helmholtzschen Diskontinuitätsfläche entspricht. Zugleich ergibt sich im Einklang mit dieser Theorie ein dem Geschwindigkeitsquadrat proportionaler Widerstand. Abweichungen zwischen der Beobachtung und der Theorie, sowohl hinsichtlich der Gestalt des Totraumes wie der Größe des Widerstandes können vielleicht eine Erklärung finden, wenn man andere mögliche Formen des Diskontinuitätsfläche untersucht. Riabouchinsky zeigt (Proceedings of the London Mathematical Society 2, 19, 3, 1920, S. 20 bis 215) daß sich der in Abb. 2 dargestellte Fall zweier paralleler Platten von der Breite h, die im Abstand l voneinander liegen, mit Hilfe von elliptischen Integralen theoretisch völlig beherrschen läßt. Man kann sich vorstellen, daß, wenn auch nur eine Patte verhanden ist, das Totwassergebiet etwa die Form der ersten Hälfte oder des ersten Drittels des in der Abbildung angedeuteten annimmt. Bemerkenswert ist, daß hier die Geschwindigkeit q_1 am Rande des Totwasserraumes erheblich größer sein kann als die Zuflußgeschwindigkeit q_0 im Unendlichen, woraus eine starke Saugwirkung auf der Hinterseite der Platte resultiert. Die untenstehende Zahlentafel gibt für verschiedene Verhältnisse $h : l$ die größte Breite l' des Totwasserraumes, das Verhältnis der beiden oben genannten Geschwindigkeiten $q_1 : q_0$, dann das Verhältnis des gesamten Widerstandsdruckes $P : l$ zum doppelten Staudruck, endlich den verhältnismäßigen Anteil der Saugwirkung am Gesamtwiderstand.

a^0	$\frac{h}{l}$	$\frac{l'-l}{l}$	$\frac{q_1}{q_0}$	$\frac{P}{\varrho q_0^2 l}$	$\frac{p_0 - p_1}{\varrho q_0^2}$
0	∞	∞	1,00	0,44	0
10	17,58	2,660	1,19	0,62	0,21
20	3,956	1,082	1.43	0,90	0,52
30	1,490	0,555	1,73	1,33	1,00
40	0,668	0,307	2,14	2,07	1,80
50	0,314	0,164	2,75	3,51	3,27
60	0,141	0,082	3,73	6,61	6,46
70	0,054	0,033	5,68	15,6	15,6
80	0,012	0,008	11,4	64,4	64,8
90	0	0	∞	∞	∞

Luftwiderstand senkrecht getroffener Kreisplatten. Um Widersprüche innerhalb der bisherigen Versuchsergebnisse aufzuklären, hat H. Zickendraht (Zeitschr. f. Phys. 12, 1922, S. 232 bis 242) eine Reihe von Experimenten durchgeführt, bei denen die Abhängigkeit der Widerstandszahl vom Durchmesser der Platte und von der Geschwindigkeit untersucht werden sollte. In einem Geschwindigkeitsbereich von 2 bis 7 m/s und bei Plattengrößen von $6^1/_4$, $12^1/_2$, 25, 50 und 100 cm² zeigte sich die Widerstandszahl mit der Geschwindigkeit wachsend etwa von 110 bis 120 (äußerste Grenzen 100 bis 124), während sie hinsichtlich der Flächengröße bei der Platte von 50 cm² einen Größtwert aufwies. Das letztere Ergebnis muß jedoch der Verfasser

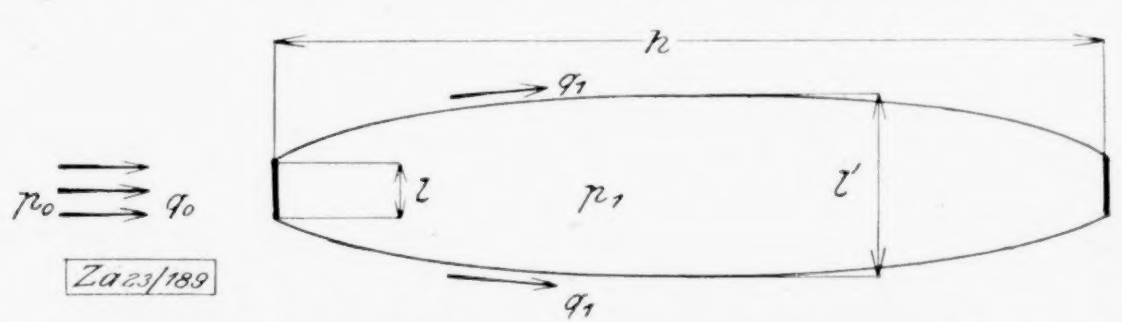


Abb. 2. Strömung zwischen zwei parallelen Platten.

selbst als irreführend bezeichnen, da offenbar für die 100 cm²-Platte der Querschnitt des Windkanals zu klein war. Die anegebene Zahl bezieht sich auf die Widerstandformel

$$W = \frac{c}{100} F \frac{\gamma}{2g} v^2,$$

in der W den Widerstand, v die Geschwindigkeit, F die Flächengröße, γ das spezifische Gewicht der Luft bezeichnet.

Bestätigung der Modellregel. Ueber einen Fall ausgezeichneter Uebereinstimmung zwischen dem Ergebnis eines Modellversuches und dem der Probefahrt eines ausgeführten Schiffes berichtet G. Kempf im »Schiffbau«, Bd. 24, 1923, S. 484 bis 486. Vor dem Bau des großen Doppelschrauben-Motorschiffes »Borodino« hat die Werft in der Schiffbauversuchsanstalt der Uebigau-Werft, Dresden, eingehende Modellversuche ausführen lassen, die vor allem eine günstige Schiffsform ergeben sollten. Das Schiff, dessen Körper auf Grund der bei den Modellversuchen gewonnenen Erfahrungen geformt wurde, erhielt die Hauptabmessungen: Länge 89 m, Breite 9,3 m, Bordhöhe 3,2 m, bei einem Tiefgang von 1,60 m. Die Versuche, die mit dem 25 mal kleineren Modell ausgeführt waren, ergaben, daß das Schiff 24,1 km/st bei einer Maschinenleistung von 1200 PS und 240 Uml./min erreichen sollte. Tatsächlich ließ die Probefahrt 24,04 km/st bei der genannten Leistung und Umdrehungszahl feststellen.

Mises. 274

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur zeichnerischen Darstellung von Kegelschnitten. In der praktischen Geometrie und in der Mechanik ist häufig die Aufgabe gestellt, einen zahlenmäßig gegebenen Mittelpunktskegelschnitt rasch und genau zeichnerisch darzustellen. Es soll hier ein Verfahren mitgeteilt werden, durch das diese Aufgabe gelöst werden kann und das trotz seines elementargeometrischen Charakters vielleicht nicht ganz ohne Interesse ist.

1. Angabe der Konstruktion.

Sei

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 = c$$

der gegebene Kegelschnitt, wobei die Koeffizienten a und c bekannte Zahlen sind. Man zeichne einen Kreis, Abb. 1, dessen Mittelpunkt

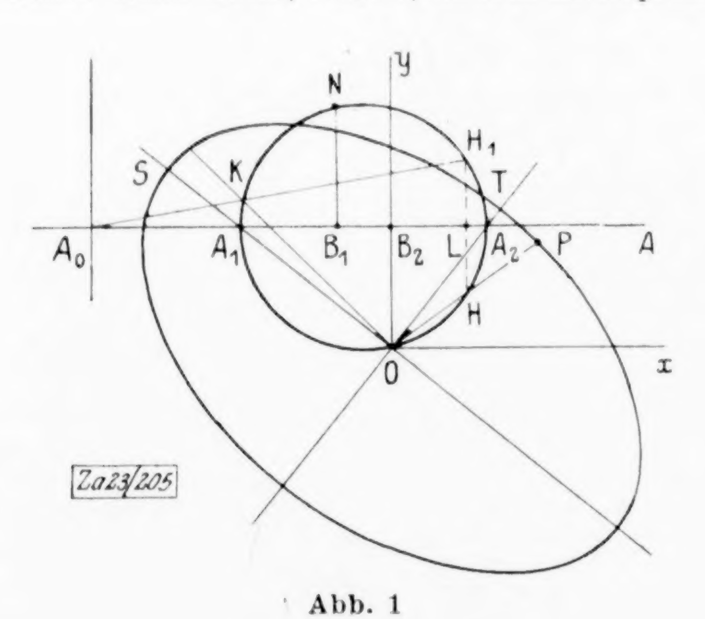


Abb. 1

auf der Geraden $A_0 A$ liegt und der durch die beiden Punkte N und O geht. Dabei ist die Lage dieser Punkte bestimmt durch:

$$A_0 B_1 = a_{11},\quad B_1 N = a_{12};\quad A_0 B_2 = a_{22},\quad B_2 O = -a_{12}.$$

Dieser Kreis schneide $A_0 A$ in A_1 und A_2. Dann sind $O A_1$ und $O A_2$ die Achsen des durch die gegebene Gleichung bestimmten Kegelschnitts, dessen Koordinatensystem natürlich Oxy ist. Die Halbachsenlängen $OS = a$ und $OT = b$ findet man aus den einfachen Beziehungen

$$a = \sqrt{\frac{c}{\lambda_1}},\qquad b = \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}},$$

wo $\lambda_1 = A_0 A_1$ und $\lambda_2 = A_0 A_2$ ist.

Allgemein erhält man die Länge r eines beliebigen Radiusvektors OP nach einem Punkt des Kegelschnitts aus $r = \sqrt{c/\lambda}$, wo $\lambda = A_0 L$ und L die Projektion auf $A_0 A$ des Schnittpunktes H von Radiusvektor und Kreis ist.

Die zu OH konjugierte Richtung OK, welche die Tangente in P liefert, ergibt sich sofort, wenn man die Gerade $A_0 H_1$ zieht, die den Kreis in K schneidet; dabei bedeutet H_1 den auf dem Kreis liegenden Spiegelpunkt von H bezüglich $A_0 A$.

Hiernach ist man in der Lage, den Kegelschnitt mit jeder gewünschten Genauigkeit schnell darzustellen. Schneidet der Kreis die durch A_0 gehende Hilfsordinate nicht, liegt er z. B. ganz auf der Seite der positiven Hilfsabszissen, und ist $c > o$, so ist der Kegelschnitt eine reelle Ellipse, Abb. 1. Schneidet er dagegen die Ordinate, etwa in C_1 und C_2, Abb. 2, so wird λ für den Bogen $C_1 A_1 C_2$ negativ und damit r imaginär. In dem Zwickel $C_1 O C_2$

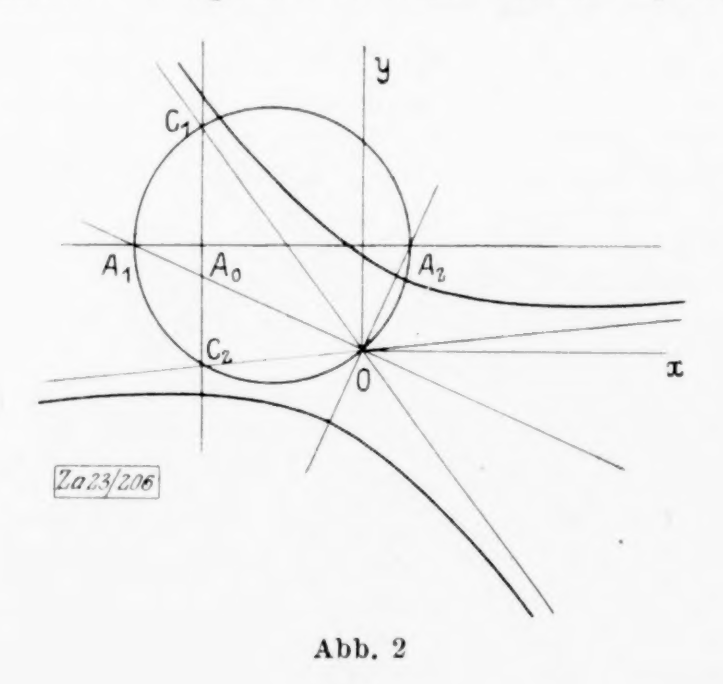


Abb. 2

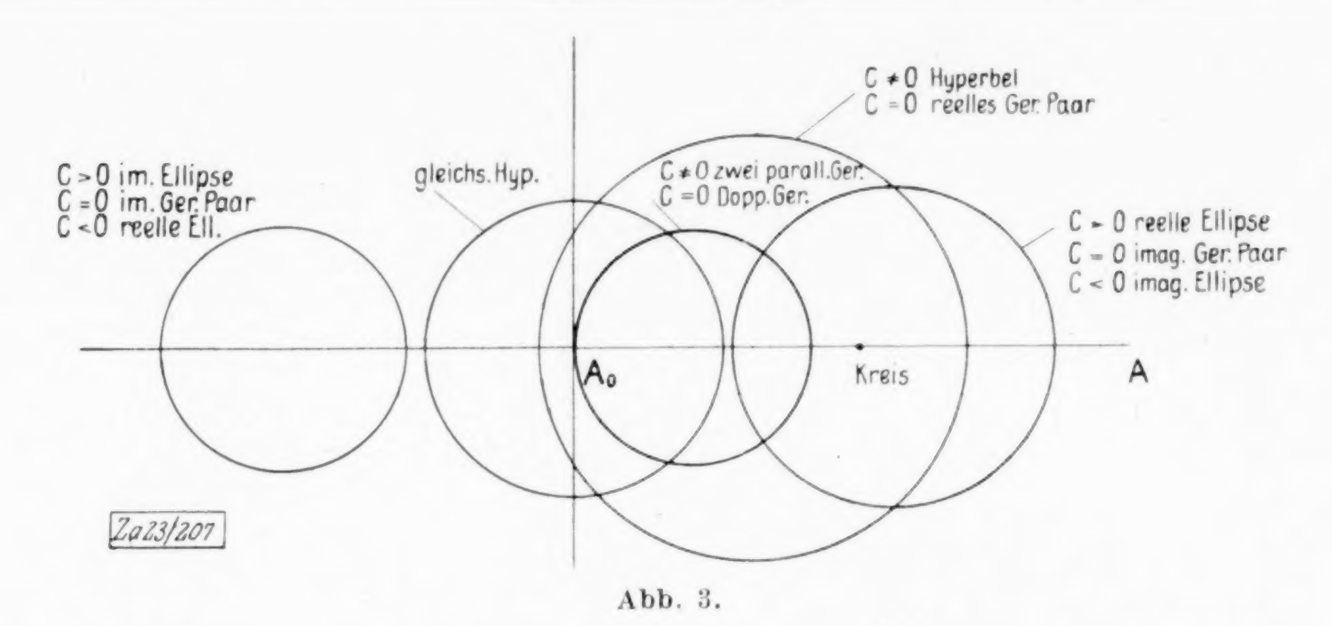


Abb. 3.

kann also kein reeller Kurvenpunkt liegen. Für die Richtungen OC_1 und OC_2 werden die Beträge der Radienvektoren unendlich groß, da ja λ verschwindet. Demnach handelt es sich um eine Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen OC_1 und OC_2.

Offenbar ist der z. B. in Abb. 1 benutzte Kreis maßgebend für die ganze Schar von Ellipsen, die geometrisch ähnlich der dort gezeichneten sind. Derartige Kreise eignen sich zur Kennzeichnung der Mittelpunktskegelschnitte, Abb. 3, und man kann sich mittels dieser leicht einfühlen, wie die einzelnen Kurven ineinander übergehen. Dabei wird auch sofort die geometrische Bedeutung derjenigen Kreise anschaulich, welche die Hilfsordinate berühren, d. h. für welche nach dem Höhensatz der Elementargeometrie $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, d. i. die Diskriminante, verschwindet (Zusammenfallen der Asymptoten) usw.

2. Beweis.

Der leichte Beweis für die angegebenen Konstruktionen beschränkt sich auf den Nachweis der Richtigkeit der Beziehung für r und der Konstruktion des konjugierten Durchmessers. Wegen des allgemeineren Interesses an einer einfachen geometrischen Darstellung des ebenen linearen Vektorfeldes sei dieser Nachweis gerade in der Richtung geführt, die den Zusammenhang des angegebenen Verfahrens mit einem solchen Vektorfeld (ebenen Spannungszustand, Trägheitsmoment od. dgl.) zum Ausdruck bringt.

Setzt man

$$u = a_{11}x + a_{12}y, \quad v = a_{12}x + a_{22}y,$$

wo die a die Koeffizienten der Kegelschnittsgleichung bedeuten, so kann man u, v als Komponenten eines (rotorfreien) Vektors $\overline{V}$ auffassen. Multipliziert man u mit x, v mit y und addiert, so erhält man die Kegelschnittsgleichung, und zwar als geometrischen Ort aller Punkte, für welche das innere Produkt $\overline{r}\,\overline{V} = c$ ist.

Es handelt sich nun um die Aufgabe, geometrisch in einfachster Weise diesen Vektor $\overline{V}$ zu finden, wenn der Ortsvektor $\overline{r}$ gegeben ist. Seien $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$ in u und v eingeführt und letztere durch r dividiert, so kommt

$$u_0 = \frac{u}{r} = a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi,$$

$$v_0 = \frac{v}{r} = a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi,$$

d. h. die Komponenten von $\overline{V}$ für $|\overline{r}| = 1$. Hat der Ortsvektor $\overline{r}$ die gleiche Richtung wie $\overline{r}_0$, dann hat auch der Vektor $\overline{V}$ dieselbe Richtung wie $\overline{V}_0$, nur ist dessen Betrag r mal so groß, so daß es zur Beherrschung des Feldes völlig genügt, $\overline{V}_0$ bezüglich des Einheitsvektors $\overline{r}_0$ zu ermitteln.

Um u_0 zu erhalten, trage man unter dem Winkel φ, Abb. 4, die Größe a_{11} von A_0 bis

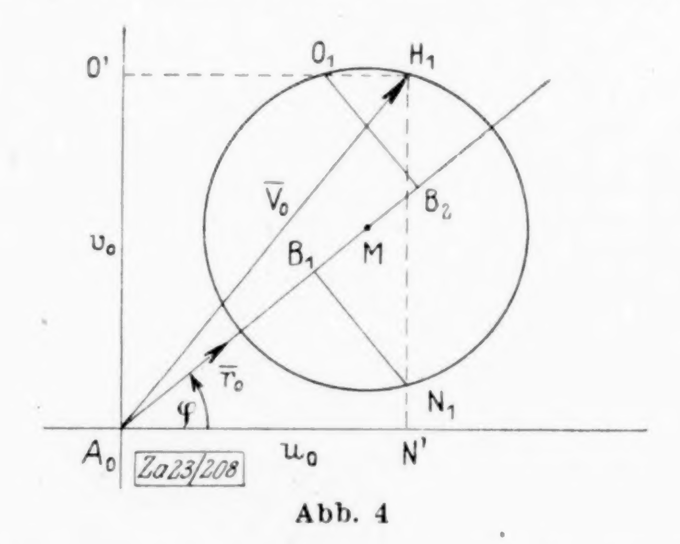


Abb. 4

B_1 auf und senkrecht dazu a_{12} von B_1 bis N_1; dann stellt A_0N' das gesuchte u_0 dar. Durch Auftragen des Wertes a_{22} von A_0 bis B_2 und a_{12} senkrecht dazu von B_2 bis O_1 erhält man in A_0O' die Größe v_0. Also ist der von $\overline{r}_0$ abhängige Vektor $\overline{V}_0$ in der Strecke A_0H_1 gefunden. Einem anderen Fahrstrahl $\overline{r}_0$ entspricht ein anderes $\overline{V}_0$, doch so, daß dessen Pfeilspitze auf einem sich mitbewegenden Kreis verbleibt, der durch N_1O_1 geht und dessen Mittelpunkt in M liegt, da ja der Winkel $N_1H_1O_1$ ein rechter ist. Hält man diesen Kreis fest, dreht dagegen die Abszissenachse A_0N' um den Winkel φ entgegengesetzt, so wird man zum gleichen Ergebnis gelangen. Man hat dann die folgende Abb. 5, die zu

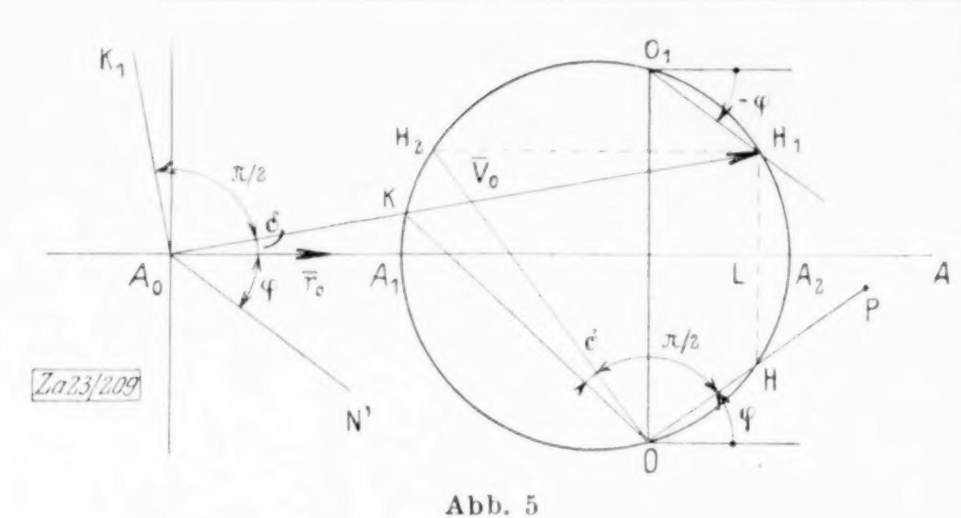


Abb. 5

jedem unter dem Winkel φ gezogenen Einheitsvektor $\bar{r}_0$ den dazu gehörigen Vektor $\bar{V}_0$ abzulesen gestattet:

Man trage in O_1 den negativen Winkel φ an, unter dem $\bar{r}_0$ gegen die Abszissenachse steht. Sein nicht horizontaler Schenkel schneide den Kreis in H_1, dann ist $\overline{A_0 H_1}$ die gesuchte, zu $\bar{r}_0$ gehörige lineare Vektorfunktion, mit der Richtung $\varphi + \delta$ bezüglich $A_0 N'$.

Ist r der Betrag von $\bar{r}$, so ist $\bar{r} = r \bar{r}_0$ und $\bar{V} = r \bar{V}_0$. Somit ist der Betrag r eines Radiusvektors nach einem Punkt des durch die Gleichung $\bar{r} \bar{V} = c$ gegebenen Kegelschnitts, mit Rücksicht auf $\bar{r}_0 \bar{V}_0 = V_0 \cos \delta = \lambda$,

$$r = \sqrt{\frac{c}{\lambda}}.$$

Um dieses r unmittelbar unter seinem von der Abszissenachse aufsteigenden Winkel φ auftragen zu können, denke man sich jetzt den Kreis um die Achse $A_0 A$ um 180° gedreht, so daß O_1 nach O, H_1 nach H kommen. Dann bestimmt r von O in Richtung φ abgetragen, wie behauptet wurde, einen Punkt des gesuchten Kegelschnitts. Die Hauptachsen mit den Scheitelpunkten insbesondere ergeben sich natürlich aus den Extremwerten von λ, d. h. aus λ_1 und λ_2.

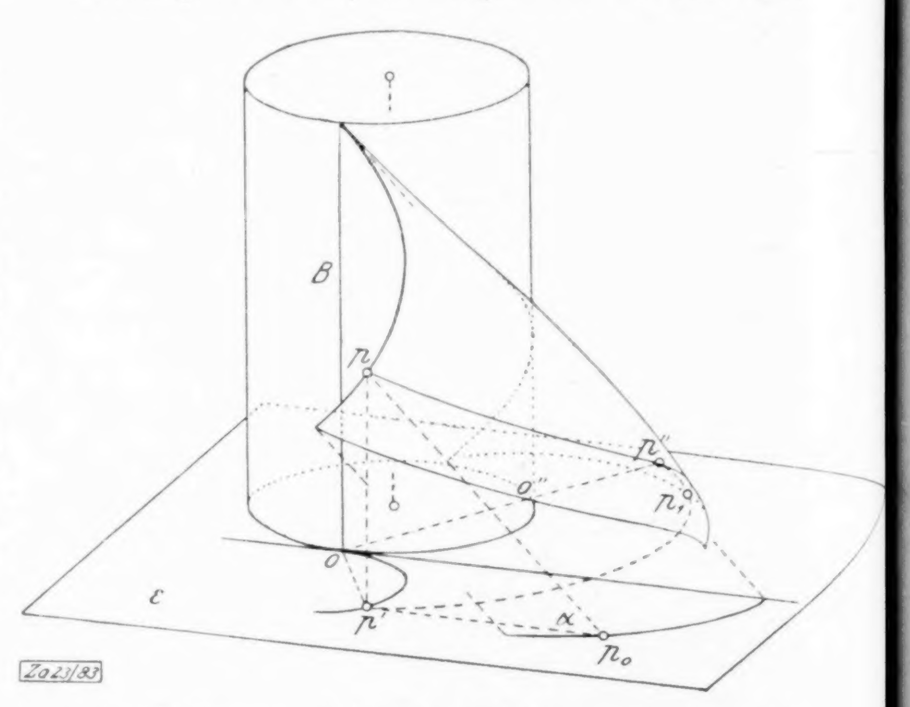
Nach Abb. 5 liegt die zu OH konjugierte Richtung in OK. Um dies zu beweisen, hat man nur zu beachten, daß der konjugierte Durchmesser, da er die Richtung der Kegelschnitt-Tangente in P hat, senkrecht steht zu dem Vektor $\bar{V} = \frac{1}{2}$ grad c. Der Winkel $A A_0 K_1 = \delta + \frac{\pi}{2}$ muß also gleich sein dem Winkel $H O K$. Nun findet sich δ in $H_2 H_1 K$ und somit in $H_2 O K$ wieder. Da wegen $H H_1 H_2 = \frac{\pi}{2}$ auch $H O H_2$ ein rechter ist, folgt ohne weiteres die Richtigkeit des Gesagten.

Darmstadt. V. Blaeß. 232

Schattenkonstruktionen an Schraubenflächen und Verzahnungslehre. Eine Schraubenfläche vom Parameter h werde durch Parallelstrahlen beleuchtet und der Schlagschatten durch eine zur Schraubenachse senkrecht stehende Ebene ε aufgefangen. Die Neigung der Lichtrichtung L gegen ε sei α. Zum Punkt p der Eigenschattengrenze gehöre der Schlagschatten p_0 und die durch p gehende Schraubenlinie treffe ε in p_1. Dann gilt der Satz:

Die Schlagschattengrenze (p_0) der Schraubenfläche auf ε und die Schnittkurve (p_1) der Schraubenfläche mit ε können als Profile einer Zahnstange und eines Zahnrades aufgefaßt werden. Ihre Eingriffslinie ist die senkrechte Projektion (p') der Eigenschattengrenze (p) der Schraubenfläche auf ε.

Ehe der Satz bewiesen wird, mögen einige naheliegende Beispiele angeführt werden. Der



abwickelbaren Schraubenfläche entspricht die Evolventenverzahnung, der Wendelfläche eine spezielle Zykloidenverzahnung, bei der eine Zykloidenzahnstange mit einem Geradflankenrad im Eingriff ist. Der allgemeinen Zykloidenverzahnung sind Schraubenflächen zugeordnet, deren Normalschnitte Epi- und Hypozykloiden sind und bei welchen die Rückkehrschraubenlinie die Steigung α hat. Nun ist die Eingriffslinie, welche zu der Epi- oder Hypozykloide gehört, mit dem Rollkreis identisch, durch welchen sie sich erzeugen läßt und zwar gehören entsprechend der doppelten Erzeugungsweise der zyklischen Kurven zwei solcher Eingriffskreise zu jeder Epi- oder Hypozykloide. Daraus folgt, daß die Eigenschattengrenze der fraglichen Schraubenflächen auf zwei Kreiszylindern liegen muß, während die Schlagschattengrenze aus gemeinen Zykloiden besteht. Die Eigenschattengrenze zerfällt in gemeine Schraubenlinien, die alle den Steigungswinkel α, aber im Fall eines epizykloidischen Normalschnitts nicht alle denselben Windungssinn haben. Diese Schraubenflächen gehören zu denjenigen Flächen, welche durch Verschraubung einer gemeinen Schraubenlinie um eine zu ihrer Achse parallele Gerade entstehen[1]). Sie sind zugleich Translationsflächen[2]). Die beigefügte Ab-

[1]) L. Burmester nennt sie zyklische Schraubenflächen. Zeitschr. für Math. u. Phys. 33 (1888), S. 344.

[2]) E. Müller, Sitzungsber. d. k. Ak. d. Wiss. in Wien. Math.-naturw. Kl. 118 (1909), S. 7.

bildung entspricht dem Fall der Zykloidenverzahnung.

Schließlich ist auch schon die Lichtgrenze der Schraubenfläche behandelt worden, welche der Triebstockverzahnung entspricht, eine besondre zyklische Schraubenfläche, deren Lichtgrenzenprojektion (p') wie die Eingriffslinie der Triebstockverzahnung in einen Kreis und eine Paskalsche Schnecke zerfällt[1]).

Um die Richtigkeit des angegebenen Satzes zu erkennen, muß man eine räumliche Verzahnung ins Auge fassen, bei welcher die Schraubenfläche und der Lichtstreifzylinder als Profilflächen eines Schraubenrades und einer Zahnstange aufgefaßt werden. Die Zähne der Stange haben die Richtung von L, sie stehen schief zur Längsrichtung der Stange, die mit der Projektion von L auf ε parallel ist. Zahnrad und Zahnstange sind längs der Eigenschattengrenze im Eingriff. Bei der Drehung des Schraubenrades verschiebt sich diese Eingriffslinie parallel zur Schraubenachse und beschreibt also eine Zylinderfläche als Eingriffsfläche. Der Schnitt dieses Eingriffszylinders mit ε wird von dem Punkt p' durchlaufen, in welchem sich die Schnittkurven (p_1) und (p_0) der Schraubenfläche und des Lichtstreifzylinders mit ε berühren.

Der Teilzylinder des Schraubenrades und die Teilebene der Zahnstange sind dadurch bestimmt, daß sie bei der Bewegung aufeinander abrollen. Die auf dem Teilzylinder verlaufenden Schraubenlinien müssen also den Steigungswinkel α, der Teilzylinder den Halbmesser $h \operatorname{ctg} \alpha$ haben.

Die von L. Burmester[2]) aufgestellten Sätze sind zumeist eine unmittelbare Folge des unsrigen.

Es sei noch bemerkt, daß unendlich viele Schraubenflächen, deren Teilzylinder die Teilebene in derselben Geraden B berühren, bei gegebener Lichtrichtung ihre Lichtgrenzen teilweise gemeinsam haben. Denn wenn man von einer gegebenen Schlagschattengrenze (p_0) ausgeht, erhält man (p') als Eingriffslinie. Aus (p_0) und (p') ist aber (p) bestimmt. Die Schraubenachse kann dann noch willkürlich in der oben angedeuteten Weise gewählt werden. Allerdings hat jede so entstehende Schraubenfläche noch eine zweite ihr eigentümliche Lichtgrenze, deren Projektion (p'') auf ε man leicht aus (p') ableiten kann. Ist nämlich (p') in Polarkoordinaten r, φ gegeben, wobei der Schnittpunkt o von B mit ε Anfangspunkt, die Schnittgerade der Teilebene mit ε Ausgangsstrahl sein soll, so braucht man nur op' um den Winkel -2φ um die Schraubenachse zu drehen, dann kommt diese Gerade in die neue Lage $o''p''$, in der sie wieder durch o geht. Der Punkt p'', welcher die Polarkoordinaten $r + d \sin \varphi$ und $-\varphi$ hat, wo d der Durchmesser des Teilzylinders ist, erfüllt dann offenbar ebenso wie p' die Bedingungen für einen Eingriffspunkt des Radprofils (p_1). Die restliche Schlagschattengrenze ist schließlich als Gegenprofil zu (p_1) mit Hilfe von (p'') zu finden.

Berlin. Eugen Stübler. 214

[1]) Z. B. in Rohn-Papperitz, Darst. Geom. II (1896), S. 140.

[2]) Zeitschr. für Math. u. Phys. 18 (1873), insbes. S. 188 u. 193. Burmester läßt, im Sinne der Verzahnungslehre gesprochen, den Teilkreis auf der Teillinie der Zahnstange abrollen, so daß die Bedeutung der Eingriffslinie als Lichtgrenzenprojektion nicht zum Ausdruck kommt.

Zwei Integralformeln mit Zylinderfunktionen nullter Ordnung. Anläßlich einer Untersuchung über die Ausbreitung elektrischer Wellen kam ich auf zwei Integralformeln, die von einigem mathematischen Interesse sein dürften. Die eine stellt eine neue Herleitung des Sommerfeldschen Integrals dar, die andere gibt einen Integralausdruck für die Exponentialfunktion, der bei manchen Rechnungen mit Vorteil angewandt werden dürfte.

1. Integraldarstellung der Hankelschen Zylinderfunktion nullter Ordnung.

Wir gehen aus von der Wellengleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Dabei sei k komplex und der Imaginärteil $J(k) > o$. Im 3-dimensionalen Raum lautet bekanntlich die Lösung, die einer punktförmigen Quelle im Ursprung entspricht

$$u = \frac{e^{ikr}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Belegen wir jetzt die z-Achse gleichmäßig mit derartigen Punktquellen, so erhalten wir durch Superposition der von diesen Quellen ausgehenden Wellen

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}}}{\sqrt{\varrho^2 + (z-\zeta)^2}} \, d\zeta \quad \ldots\ldots (3),$$

wenn wir den Abstand des Aufpunkts von der Quellenachse mit ρ, die z-Koordinate des Quellpunkts mit ζ bezeichnen. Der Ausdruck (3) hängt nur noch scheinbar von z ab: Durch die Substitution $\zeta - z = \lambda$ erhält man nämlich

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{\varrho^2 + \lambda^2}} \, d\lambda = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{\varrho^2 + \lambda^2}} \, d\lambda \quad (4).$$

Damit ist das Problem 2-dimensional geworden. In der Ebene ist aber bekanntlich bei allseitiger Symmetrie die einer Quelle in 0 entsprechende Lösung, welche im Unendlichen verschwindet, die Hankelsche Zylinderfunktion nullter Ordnung und erster Art. Beide Lösungen müssen bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen, also

$$H_0^{(1)}(k\varrho) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{\varrho^2 + \lambda^2}} \, d\lambda \quad \ldots (5).$$

Durch die Substitution

$$\lambda \cdot = i\,\varrho \sin w$$

ergibt sich die Sommerfeldsche Integraldarstellung

$$H_0^{(1)}(k\varrho) = i\,C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,\varrho \cos w}\, dw \quad . \; . \; . \; (6).$$

Dabei ist mit Rücksicht auf die Konvergenz der Weg so zu führen, daß $J(\cos w) > 0$. Im Sommerfeldschen Integral ist der Faktor $C = -\frac{1}{\pi}$. Es ist also

$$H_0^{(1)}(k\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,k\,\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\, d\lambda$$

$$= \frac{2\,i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\,k\,\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\, d\lambda \quad (I).$$

Der Integrationsweg ist zunächst die reelle Achse. Bei der Deformation ins komplexe ist der Weg so zu führen, daß $J(k\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}) > 0$ bleibt. Die Herleitung unseres Integrals ist zu der Sommmerfeldschen gerade dual, denn diese läßt die Zylinderwelle durch das Zusammenwirken von ebenen Wellen entstehen.

2. Integraldarstellung der Exponentialfunktion.

Dasselbe Verfahren wenden wir jetzt zum Uebergang vom 2-dimensionalen zum 1-dimensionalen Fall an. Einer einzelnen Quelle in 0 entspricht die Lösung

$$u = H_0^{(1)}(k\varrho) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Belegen wir die y-Achse der Ebene mit derartigen Quellen, so ergibt sich

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(\eta-y)^2}\right) d\eta \quad . \; . \; (8)$$

(η: Y-Koordinate der Quelle).

Die Abhängigkeit von y ist wegen der Grenzen des Integrals wieder nur scheinbar und wird durch die Substitution $\eta - y = \mu$ weggeschafft. Es ist also die dieser Verteilung der Quellen entsprechende Lösung

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+\mu^2}\right) d\mu$$

$$= 2\int_0^{\infty} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+\mu^2}\right) d\mu \quad (9).$$

Andererseits ist im 1-dimensionalen die im positiv unendlichen verschwindende Lösung der Wellengleichung:

$$u = e^{i\,k\,x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Beide Ausdrücke können sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, also:

$$\left.\begin{aligned} e^{i\,k\,x} &= C\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+\mu^2}\right) d\mu \\ &= 2\,C\int_0^{\infty} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+\mu^2}\right) d\mu \end{aligned}\right\} (11).$$

Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir $x = 0$ und erhalten

$$1 = 2\,C\int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k\mu)\, d\mu = \frac{2\,C}{k} \quad . \; . \; (12).$$

Somit:

$$e^{i\,k\,x} = k\int_0^{\infty} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+\mu^2}\right) d\mu \quad . \; . \; (II).$$

(II) stellt $e^{i\,k\,x}$ nur für positive x dar. Für große x läßt sich die Formel leicht verifizieren. Durch Einsetzen der bekannten asymptotischen Darstellung der Zylinderfunktionen wird nämlich

$$\lim_{x=\infty} e^{i\,k\,x} = \frac{k\,K}{\sqrt{k}} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\,k\,\sqrt{x^2+\mu^2}}}{\sqrt[4]{x^2+\mu^2}}\, d\mu \quad (13),$$

wobei wir

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{i\pi}{4}} = K \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

gesetzt haben.

Durch die Substitution

$$\sqrt{x^2+\mu^2} = x\,t$$

erhält man:

$$\lim_{x=\infty} e^{i\,k\,x} = K\sqrt{k}\sqrt{x} \int_1^{\infty} \frac{e^{i\,k\,x\,t}\sqrt{t}}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \quad (15)$$

und durch die weitere Substitution: $\sqrt{t-1} = v$:

$$\lim_{x=\infty} e^{i\,k\,x} = K\sqrt{k}\sqrt{x}\, e^{i\,k\,x} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\,k\,x\,v}\sqrt{v+1}}{\sqrt{v+2}\sqrt{v}} \quad (16).$$

Nun ist nach einer bekannten Formel[1])

$$\lim_{r=\infty} \int_0^{i\infty} e^{i\,t\,r} f(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = f(o)\sqrt{\frac{\pi}{v}}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (17).$$

Um diesen Satz hier anwenden zu können, nehmen wir den Integrationsweg entlang der positiven reellen Achse bis ∞ und dann längs eines Viertelkreises von ∞ großem Radius nach $i\infty$. Auf dem letzten Weg ist aber das Integral null. Da auf dem ganzen Weg keine singulären Punkte liegen, steht der Anwendung dieser Formel nichts im Weg. Es wird also

$$\lim_{x=\infty} e^{i\,k\,x} = \sqrt{k}\,K\sqrt{x}\, e^{i\,k\,x} \sqrt{\frac{\pi}{2\,k\,x}}\, e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{i\,k\,x} \quad (18).$$

Herrn Priv.-Doz. Dr. Volk bin ich für einige Ratschläge zu Dank verpflichtet.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Oktober 1922.

Georg Joos. 229

[1]) Vergl. z. B. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen 1, S. 62, 4. Satz.

BUCHBESPRECHUNGEN

WILHELM **BLASCHKE,** ord. Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. **Vorlesungen über Differential-Geometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. I. Elementare Differentialgeometrie. Mit 38 Textfiguren. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band I. Verlag von Julius Springer in Berlin. 1921. X + 230.**

In seinem neuen Werke hat Blaschke es verstanden, die wichtigsten und interessantesten Fragen der Differentialgeometrie auf erstaunlich kurzem Raume zu behandeln und gleichzeitig seiner Darstellung ein ganz persönliches Gepräge gegeben. Das Buch enthält zunächst eine recht vollständige Uebersicht derjenigen Lehren der Kurven- und Flächentheorie, die seit Monge und Gauß klassisch geworden sind. Daneben aber ist nicht nur die Variationsrechnung gebührend berücksichtigt, sondern dasselbe gilt auch von der »Flächentheorie im Großen«, einem der schönsten Gebiete, die die moderne Geometrie aufzuweisen hat.

Die Wahl der behandelten Fragen, die einerseits dazu dienen, das Lehrgebäude aufzubauen, andererseits Proben der Kraft geben, die in der Theorie selbst steckt, scheint mir ganz ausgezeichnet zu sein; sie zeigt in welchem Maße der Autor seinen Stoff beherrscht. So enthält das Buch u. A. die schönen Resultate von Radon über Variationsprobleme, die nur von der Krümmung einer Raumkurve abhängen, die Sätze von H. A. Schwarz über Kurven mit fester erster Krümmung und die von Liebmann über die Starrheit der Kugel, den Beweis von Herglotz für einen überraschenden Satz Poincarés, daß jede konvexe Fläche mindestens drei geschlossene geodätische Linien enthält, den außerordentlich schönen Beweis von W. Groß für die Isoperimetrie der Kugel und endlich das Uebertragungsprinzip Studys durch welches die ∞^6 Bewegungen unseres Raumes als »duale« Drehungen der Einheitskugel gedeutet werden. Es ist besonders zu begrüßen, daß diese letzte Theorie, die für die Mechanik der starren Körper wichtig ist, endlich auch einem größeren Publikum zugänglich gemacht worden ist.

Nach dem Vorbilde Kleins, der im mündlichen Verkehr sowohl wie im Druck stets den historischen Werdegang der mathematischen Ideen betonte, hat auch Blaschke in seinem Buche einen Abriß der Geschichte der Flächentheorie eingestreut.

Dem vorliegenden Bande sollen zwei weitere folgen, der eine über affine Differentialgeometrie der andere über die Maßbestimmungen von Riemann und Weyl.

Trotz der Vielseitigkeit der behandelten Gegenstände sind diese in einem festen Rahmen gefaßt und so übersichtlich angeordnet, daß man das Werk — das allerdings wegen der teilweise zu großen Kürze der Darstellung manchmal schwerer als nötig zu lesen ist — ruhig auch einem Anfänger, falls dieser fleißig und aufmerksam ist, in die Hand geben kann.

Smyrna, den 21. Juli 1922.

C. Carathéodory. 205

NACHRICHTEN

Arthur Schoenflies. Am 17. April ds. Js. feierte Arthur Schoenflies in Frankfurt a. M. seinen siebzigsten Geburtstag. In Landsberg a. d. Warthe geboren, studierte er 1870 bis 1875 Mathematik und Physik an der Berliner Universität und promovierte hier im Jahre 1877. Nachdem er einige Zeit als Gymnasiallehrer in Berlin und Kolmar gewirkt hat, habilitierte er sich 1884 in Göttingen, wo er 1892 die auf Veranlassung von Felix Klein geschaffene außerordentliche Professur für angewandte Mathematik geometrischer Richtung als erster übernahm. Schon mehrere Jahre vorher hatte er begonnen, regelmäßig Vorlesungen über konstruktive Geometrie zu halten, ein Fach, das damals auf den Universitäten noch ziemlich fremd war. Im Jahre 1899 wurde Schoenflies als ordentlicher Professor der Mathematik nach Königsberg berufen, wo er bis 1911 verblieb. Er folgte dann einem Ruf an die Frankfurter Akademie, die um diese Zeit ihre Lehrstühle schon mit Rücksicht auf die in Entstehung begriffene Universität besetzte. An den Vorbereitungen zur Gründung der Universität nahm Schoenflies erfolgreichen Anteil und er konnte im Studienjahr 1920/21, dem vorletzten, in dem ihn das Ueberalterungsgesetz in voller amtlicher Tätigkeit beließ, die Genugtuung erleben, als Rektor der jungen Universität zu fungieren.

Am bekanntesten in weiteren Kreisen ist der Name Schoenflies wohl durch den »Nernst-Schoenflies« geworden, ein eben in 10. Auflage erschienenes Buch zur Einführung in das Studium der höheren Mathematik, das in erster Reihe für die Bedürfnisse der Physiker und Chemiker geschrieben, auch für Ingenieure und Techniker einen sehr brauchbaren Lehrbehelf bildet. Ein ebenfalls für Anfänger bestimmtes Lehrbuch ist das 1908 erschienene »Hauptzüge der zeichnerischen Darstellungsmethoden«, das auf die älteren Göttinger Vorlesungen zurückgeht. In einem weiteren, heute noch nicht veralteten Werke »Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung« (1886) liefert Schoenflies eine Zusammenfassung der wichtigsten Lehren

der geometrischen Kinematik, sowohl für die ebene wie für die räumliche Bewegung. Namentlich was die letztere betrifft, gibt es bisher kaum eine Darstellung in deutscher Sprache, die sich mit der Schoenfliesschen messen ließe, besonders, da das Burmestersche Werk unvollendet geblieben ist. Von diesem unterscheidet sich das Buch von Schoenflies, das andererseits auf die zahlreichen Anwendungsbeispiele einzugehen gänzlich verzichtet, in seinem der ebenen Bewegung gewidmeten Teil durch die knappere und präzisere Fassung.

Für die große Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften hat Schoenflies in Band III den Bericht über Kinematik gemeinsam mit Grübler bearbeitet, ferner in Band V mit Liebisch und Mügge das Referat über Kristallographie. Auf diesem Gebiete liegen wohl die hauptsächlichsten Verdienste von Schoenflies, soweit es sich um angewandte Mathematik handelt. Er veröffentlichte im Jahre 1891 ein umfassendes Werk über Kristallsysteme und Kristallstruktur, das erst in den letzten Jahren auf Grund der modernen Fortschritte der theoretischen Physik, namentlich der Atomtheorie, zu neuer Geltung gelangt ist. Eine Neubearbeitung des Buches hat Schoenflies eben jetzt in seinem 70. Lebensjahr vollendet, gewiß ein vollgültiger Beweis seiner geistigen Frische und Regsamkeit, die uns noch manche wertvolle Leistung von ihm erhoffen läßt. Es soll hier auch nicht verschwiegen werden, daß Schoenflies sein Hauptinteresse seit vielen Jahren der reinen Mathematik zugewandt und neben wertvollen Untersuchungen zur synthetischen Geometrie sich namentlich durch Arbeiten über Probleme der Mengenlehre und einen ausführlichen historischen Bericht über die Entwicklung der Mengenlehre einen Namen gemacht hat.

Bei allen, die Schoenflies persönlich nahegetreten sind, hat er sich durch sein aufrechtes und liebenswürdiges Wesen durch eine von strenger Sachlichkeit geleitete Lebensführung, wie durch stete, von Wärme und Güte erfüllte Hilfsbereitschaft Hochschätzung und Verehrung in weitem Maße erworben.

Mises. 277

Vorlesungen über angewandte Mathematik an den Technischen Hochschulen Deutschlands. Eine Zusammenstellung der Vorlesungen über angewandte Mathematik an den Technischen Hochschulen ist deshalb nicht ganz einfach, weil man ja in gewissem Sinne einen sehr großen Teil aller dort behandelten Gebiete als »angewandte Mathematik« bezeichnen muß. Die Auswahl ist im Folgenden (für das Winterhalbjahr 1922/23) so getroffen, daß alle laufenden oder regelmäßig wiederkehrenden Vorlesungen über darstellende Geometrie, Vermessungskunde, projektive Geometrie, allgemeine Mechanik, theoretische Elektrotechnik, theoretische Maschinenlehre, Baumechanik usw. nicht aufgenommen worden sind. Grundsätzlich sind also nur solche Vorträge aufgezählt, die von Mathematikern oder Physikern mit dem deutlichen Hinblick auf angewandte Mathematik gehalten werden, und die einerseits der Weiterbildung der Ingenieure, andererseits aber auch der Ausbildung der Studierenden der angewandten Mathematik und der technischen Physik an den Hochschulen dienen.

Aachen: Brandt, graphisches Rechnen, Vortr. und Ueb. nach Uebereinkunft
Eckert, astronomische und mathematische Geographie, 1 Vortr.
Hopf, Stabilität und Steuerung der Flugzeuge, 2 Vortr. (von Weihnachten an).
v. Karman, Aerodynamik als Einleitung zum Flugzeugbau, 3 Vortr. (bis Weihnachten).

Berlin: Berndt, Maß und Messen in der Technik, 1 Vortr.
Everling, Wirbel und Zirkulation, 1 Vortr.
Fuchs, die Luftkräfte in der Flugtechnik, 2 Vortr. (Außeninstitut).
Hamel, theoretische Mechanik V (Elastizitätstheorie), 2 Vortr.
Rothe, praktische Mathematik (rechnerische, zeichnerische und instrumentelle Verfahren), 2 Vortr.
Rothe und Hamel, praktische mathematische Uebungen im Institut für angewandte Mathematik.

Braunschweig: Eisenmann, graphische Statik, 2 Vortr.
O. Foeppl, Aerodynamik, 1 Vortr.
Harbert, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2 Vortr.

Breslau: Feyer, Vektoranalysis, 2 Vortr.
Feyer, Perspektive, 2 Vortr.
Schmeidler, numerische und graphische Integration von Differentialgleichungen mit Uebungen, 2 Vortr. und Ueb.

Danzig: Lührs, Anwendung der geodätischen Linie in der Geodäsie, 1 Vortr.
Schilling, graphische Statik II, 3 Vortr.
Schilling, Kinematik (geometrische Bewegungslehre) mit technischen Anwendungen, 1 Vortr.

Darmstadt: Blaeß, Vektorenrechnung, 2 Vortr.
Hohenner, praktische Geometrie, 2 Vortr.
Hohenner, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 2 Vortr.
Schlink, höhere Aerodynamik, 2 Vortr.
Wiener, die Schwingungen in geometrischer Behandlung, 2 Vortr.
Wiener, Arbeiten im mathematischen Institut, 3 Ueb.

Dresden: Boehmer, Interpolations- und Differenzenrechnung, 2 Vortr.
Boehmer, Kollektivmaßlehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3 Vortr.
Boehmer, Uebungen zur Versicherungsmathematik, 2 Ueb.
Hugershoff, Photogrammetrie aus Luftfahrzeugen, 1 Vortr.

Hannover: C. Müller, die wichtigsten Differentialgleichungen der Technik, 2 Vortr.
Prange, mathematische Fragen in Maschinenbau und Elektrotechnik, 2 Vortr.
Pröll, graphische Statik, 2 Vortr.
Pröll, Aerodynamik, 2 Vortr.

Karlsruhe: Boeß, hydraulisches Rechnen, 2 Vortr.
Heun, mechanisches Seminar (Dynamik) 3.
Näbauer, Methode der kleinsten Quadrate, 2 Vortr.

München: Finsterwalder, höhere Geodäsie, 2 Vortr.
Finsterwalder, Rechenübungen zur höheren Geodäsie, 2 Ueb.
L. Foeppl, graphische Statik, 3 Vortr.
v. Gruber, Photogrammetrie, 2 Vortr.
v. Gruber, Anleitung zu photogrammetrischen Arbeiten, 2 Ueb.
v. Gruber, geographische Ortsbestimmung und flüchtige Geländeaufnahme, 2 Ueb.
Knoblauch, Einführung in die mathematische Behandlung chemischer Fragen, 2 Vortr.
Schäfer, Anleitung zur rechnerischen Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 2 Ueb.
Schloetzer, mechanisches Rechnen (Rechenschieber, Rechenscheiben, Rechenmaschinen), 1 Vortr.

Stuttgart: Baumann, Segelflug, 1 Seminar.
Hammer, Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate), 2 Vortr.
Hammer, Kartenprojektionen für kartographische und geodätische Zwecke 1 Vortr.
Hammer, Photogrammetrie, 2 Vortr.
Mehmke, graphisches Rechnen, 2 Vortr.
Weyrauch, hydraulisches Rechnen, 1 Vortr.

Berlin. R. Fuchs. 282

Universitäts-Vorlesungen aus der angewandten Mathematik. Zu der in Bd. 2, S. 478/79 veröffentlichten Reihe von Vorlesungen ist noch nachzutragen:

Leipzig: Finanz- und Versicherungsmathematik, 2 Vortr., Lorey.
Uebungen zur Versicherungsmathematik, 1 Ueb., Lorey.
Gemeinsame Uebungen zur Versicherungswissenschaft, 2 Ueb., Rehm, Jacobi, Lorey und Lübstorff.

Mathematische Gesellschaft in Amerika. Zu der im ersten Heft dieses Jahrganges S. 73 gebrachten Mitteilung über die Versammlung der amerikanischen Mathematiker macht Prof. R. C. Archibald darauf aufmerksam, daß in Amerika zwei Vereinigungen bestehen: Die »Mathematical association of America« und die »American mathematical society«. Die erwähnte Versammlung wurde von der ersteren dieser Gesellschaften veranstaltet.

Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereines deutscher Ingenieure. Am 28. Mai: Dr. W. Hort, Selbsterregung von Schwingungen, mit Vorführung von Versuchen; am 11. Juni: Obering. Naatz, Beanspruchung und Festigkeit von Luftschiffen, mit Lichtbildern. Ferner 2. Juli: Reg.-Baumstr. Eisner, Ueber hydraulisches Fließen, insbesondere bei rauher Wandung.

Herbstversammlung 1923. Im Herbst dieses Jahres soll ein Naturforschertag nicht stattfinden. Dagegen wurde in Leipzig in Aussicht genommen, eine Tagung der beiden physikalischen Gesellschaften und der Mathematiker-Vereinigung in Bonn abzuhalten, der sich auch unsere neugegründete Vereinigung der angewandten Mathematiker anschließen wollte. Nun ist aber aus politischen Gründen das Zustandekommen einer Versammlung in Bonn sehr unwahrscheinlich. Die Physiker werden dann vermutlich auf eine Tagung ganz verzichten, die Mathematiker denken an eine Zusammenkunft an einem zentral gelegenen Ort. Es wäre erwünscht, daß sich unsere Mitglieder zu der Frage äußerten, ob auf eine Jahresversammlung in diesem engeren Rahmen Wert gelegt wird.

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

Die Bewegung des Dollarkurses seit 1918. Im fünften Abschnitt der in dieser Zeitschrift Bd. 2, 1922, S. 306 bis 312 erschienenen kleinen Mitteilung gibt Herr v. Mises eine Analyse der Kursbewegung, welche in anschaulichster Weise zwischen wesentlichen und unwesentlichen Teilen zu unterscheiden gestattet, indem er die »beste Angleichung durch eine monoton ansteigende Linie« konstruiert.

Es sei mir der Hinweis gestattet, daß eine geringfügige Erweiterung des Begriffes der Monotonie diese Art der Ausgleichung befähigen würde, auch bei dauernd und zwar bis zur Parität fallenden Kursen, also für den Fall eines in fortschreitender Gesundung befindlichen Wirtschaftslebens, Anwendung zu finden. Um dies zu zeigen, muß ich mit gebotener Kürze auf die Theorie des Papiergeldes eingehen, die ich bereits anderwärts[1]) darzustellen Gelegenheit hatte.

Da eine Banknote ein auf Metallgeld lautender Schuldschein ist, muß sie folgerichtig einen Diskont erfahren, wenn die Einlösung zum Nennwert zeitweise unmöglich wird. Dieser Diskont drückt sich im Metallagio und im Steigen der Kurse für fremde Zahlungsmittel am deutlichsten aus. Ist die Beurteilung der Lage durch die internationale Geschäftswelt derart, daß sie der Erwartung gleichkommt,

[1]) In zwei Vorträgen in der Gesellschaft österreichischer Volkswirte bezw. im volkswirtschaftlichen Seminar des Herrn Dr. Dr. Kerschagl und Dr. Madlé an der Hochschule für Welthandel in Wien, sowie im Wiener Handelsblatt vom 27. Februar bis 2. März 1922.

als ob eine »Einlösbarkeit« der Noten für wirklichen Bedarf an Metall (nicht etwa die wirkliche Einlösung aller umlaufenden Noten) erst in n Jahren möglich sein kann, so würde der Metallwert einer entwerteten Note, also etwa der Kurs der Mark in Dollar

$$K = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

betragen, wenn K_n den paritätischen Markkurs und p den üblichen Zinsfuß für gestundete Zahlungen = 6 vH bedeutet. Aus Gleichung (1) folgt dann

$$n = \frac{\log K_n - \log K}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

die Anzahl der Jahre, welche der Welthandel in einer Art von »Kollektiv-Weisheit« (Mill) **bis zur Erreichung der Vollwertigkeit des betreffenden Notengeldes für erforderlich erachtet.**

Es ist hier nicht der Ort, auf die Gründe näher einzugehen, weshalb 6 vH als Zinsfuß angenommen wurde. Uebrigens dürfte er bei besonders tief entwerteten Valuten beträchtlich höher anzusetzen sein. Berechnet man aber mit $p = 6$ die Stundungsfristen n für eine Reihe historischer Beispiele, indem man für K den niedrigsten Metallwert eines Papiergeldes nach großen Kriegen einsetzt, so ergibt sich im allgemeinen eine befriedigende Uebereinstimmung mit dem Zeitraum, welcher in diesen Fällen zwischen der größten Depression und der Währungsherstellung lag. So für England und Preußen nach den Napoleonischen Kriegen, für die Vereinigten Staaten von Nordamerika nach dem Civil-war. Für Oesterreich nach 1859 weist die Rechnung auf eine Valutaherstellung Ende 1866 oder Anfang 1867 hin. Allem Anscheine nach trug nur der Krieg von 1866 Schuld daran, daß sie nicht zur Tatsache wurde[1]). Auch die neueste Geschichte der Währungen scheint, wenn auch in anderer Weise, Bestätigungen für jene Theorie zu liefern, welche man eine »transcendent-metallistische« nennen kann.

Aus Gl. (2) folgt zunächst, daß eine in ungestörter Gesundung begriffene Volkswirtschaft sich im Schaubild als gerade Linie darstellt, wenn man die Zeit als Abszisse und die Logarithmen der Kurse ausländischer Zahlungsmittel von unveränderlichem Metallwert als Ordinaten aufträgt. **Diese Gerade fällt gegen rechts zu unter dem Neigungswinkel** $\operatorname{tg} \alpha = -\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, wenn der Maßstab für log 10 und für $n = 1$ Jahr gleich gewählt sind. Dann ergibt sich aber auch die Möglichkeit, zwischen wesentlichen und unwesentlichen Kursschwankungen wie folgt zu unterscheiden:

Es soll diejenige Linie gezeichnet werden, die nirgends rascher fällt, als mit der Neigung $\operatorname{tg} \alpha = -\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ und sich dabei der Auszugleichenden am engsten anschließt. Hierin liegt die eingangs erwähnte geringfügige Abänderung des von Herrn v. Mises verwendeten Begriffes einer »besten Ausgleichung durch eine monoton ansteigende Linie«. Sie ist geringfügig, denn die Neigung beträgt bei den in Abb. 3 auf S. 311 benutzten Maßstäben nur $1^1/_2{}^0$.

Eine solche »klinogonal-monotone« Ausgleichslinie würde sich wie diejenige des Herrn v. Mises zusammensetzen aus Teilen der Auszugleichenden und eingeschobenen Geraden, nur sind diese nicht horizontal. Erreicht eine solche Gerade bei dauernd fallenden Kursen schließlich einen Schnittpunkt mit der Abszissen-Achse, was nur eintreten kann, wenn die Kurse in der Nähe des Schnittpunktes auf die Parität zurückgesunken sind, so kommt die ganze Analyse der Störungsepoche zu einem natürlichen Abschluß. Jedes ansteigende Stück der Auszugleichenden, welches in der solcherart konstruierten Ausgleichslinie enthalten ist, weist auf eine neue Störung bezw. eine Unterbrechung der Gesundung hin. Dies wären dann die »wesentlichen« Kursbewegungen. Die Geraden aber beschreiben Ansätze und Vollendung der Gesundung. Als »unwesentlich« könnten die Abweichungen von den eingeschobenen, geneigten Geraden angesehen werden. Es würde sich wahrscheinlich zeigen, daß sie häufig die Gestalt von gedämpften Schwingungen um die geneigten Geraden besitzen dürften. Auch der von Herrn v. Mises besonders erwähnte mittlere Teil seiner monoton ansteigenden Ausgleichslinie auf der durchschnittlichen Höhe von 65 ℳ scheint einer solchen Schwingung in der Hauptbewegung anzugehören. Nach dem zweiten schon stark gedämpften Ausschlag nach unten bewirkt eine neue große Störung den darauf folgenden Anstieg.

Wien, 26. Januar 1923.

Paul Fillunger. 255

[1]) Knapp, Staatliche Theorie des Geldes, 2. Aufl. 1918, S. 214.

Berichtigung.

Die Fußnoten in der Kleinen Mitteilung »Segelflug und Aehnlichkeitsgesetz« von v. Mises auf S. 66 sind falsch beziffert: Zum Verfassernamen O. Lilienthal gehört die zweite, zu Popper-Lynkens die dritte Fußnote.

(Redaktionsschluß 30. April 1923.)

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.